Frisch : Introduction à la géométrie analytique complexe.

(cours de P. Maisonobe)

Contents

Remarques sur le cours : Introduction à la géométrie analytique complexe.

(R1) Les notations sont celles de la p19 verso. $\{(M_i, f_{ji})\}_{i\in I}$ et $\{(N_i, f'_{ji})\}_{i\in I}$ sont 2 systèmes inductifs indicés sur I, filtrant à droite, et $g=(g_i)_{i\in I}$ $g_i : M_i \to N_i$ commutent avec les f_{ji} et f'_{ji}.

Alors $\varinjlim g_i : \varinjlim M_i \longrightarrow \varinjlim N_i$ est défini grâce à la propriété
$f_i(x) \longmapsto f'_i(g_i(x_i))$
universelle de la limite inductive.

On a noté $f_i : M_i \to \varinjlim M_i$ (resp. f'_i) les proj. canoniques.
$x \longmapsto f_i(x)$

En effet :

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{f'_i\circ g_i} & \varinjlim N_i \\ \downarrow & \nearrow_{\varinjlim g_i} & \\ \varinjlim M_i & & \end{array}$$

Les $M_i \xrightarrow{f'_i\circ g_i} \varinjlim N_i$ commutent avec les f_{ji} par hyp., donc se factorisent à travers $\varinjlim M_i$ en posant :

$$\boxed{\varinjlim (f_i(x_i)) \doteq f'_i\circ g_i(x_i) \quad \forall x_i \in M_i} \quad (1)$$

Application : p21 verso $\boxed{\varphi_x(s_x) = (\varphi(U)(s))_x}$

$\varphi : \underline{E} \to \underline{F}$ est un morphisme de faisceaux et $\varphi_x : \underline{E}_x \to \underline{F}_x$ est le morphisme induit par φ sur les fibres par passage à la limite inductive, ie $\varphi_x \doteq \varinjlim \varphi(U)$ où $\underline{E}_x = \varinjlim \underline{E}(U)$ et $\underline{F}_x = \varinjlim \underline{F}(U)$

Si $s\in \underline{E}(U)$ et $x\in U$, on a :

$\varphi_x(s_x) = (\varinjlim \varphi(U))(s_x)$

$\varphi_x(s_x) = (\varphi(U)(s))_x$ d'après (1)

D'où $\{x\in X / (\varphi(U)\}(s))_x \in \Omega'\} = (\widetilde{\varphi(U)(s)})^{-1}(\Omega')$ comme prévu.

(R2) Définition 1.6 p20

Un $\underline{A}$-module est un faisceau de groupes $\underline{F}$ sur X tel que

1) $\forall U \Subset X$ $\quad \underline{F}(U) = \underline{A}(U)$-module

2) Les restrictions $\rho_{UV} : \underline{F}(V) \to \underline{F}(U)$ sont α_{UV}-linéaires, où $\alpha_{UV} : \underline{A}(V) \to \underline{A}(U)$ sont les restrictions de $\underline{A}$.

Le 2) signifie que $\forall x \in \underline{F}(V)$ $\forall a \in \underline{A}(V)$ $\quad \rho_{UV}(a.x) = \alpha_{UV}(a)\,\rho_{UV}(x)$.
Le 2) permet d'affirmer qu'alors chaque fibre $\underline{F}_x$ de $\underline{F}$ est structurée en $\underline{A}_x$-module. En effet :

(*) " Soit $\{(M_i, f_{ji})\}_{i\in I}$ un système inductif de A_i-modules et $\{(A_i, f'_{ji})\}_{i\in I}$ un système inductif d'anneaux. Supposons, de plus, que toutes les applications f_{ji} soient f'_{ji}-linéaires. Alors :

$$\varinjlim M_i = \varinjlim A_i\text{-module} \text{ "}$$

Il suffit d'appliquer (*) avec le syst. inductif $\{(\underline{F}(U), \rho_{VU})\}_{x\in U \Subset X}$ pour obtenir $\boxed{\underline{F}_x = \underline{A}_x\text{-module}}$

Prouvons (*) : On va définir $\dot{a}_i\,\dot{x}_i \doteq \dot{\overline{a_i x_i}}$ où $a_i \in A_i$ et $x_i \in M_i$, $\dot{a}_i$ désignant la classe de a_i dans $\varinjlim A_i$. Pour pouvoir le faire, il faut vérifier que

$$\begin{cases} \dot{a}_i = \dot{a}_j \\ \dot{x}_i = \dot{x}_j \end{cases} \Rightarrow \dot{\overline{a_i x_i}} = \dot{\overline{a_j x_j}}$$

C'est facile :

$$\left.\begin{matrix} \dot{a}_i = \dot{a}_j \\ \dot{x}_i = \dot{x}_j \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists k \begin{cases} f'_{ki}(a_i) = f'_{kj}(a_j) \\ f_{ki}(x_i) = f_{kj}(x_j) \end{cases}$$

Or $f_{ki}(a_i x_i) \underset{(*)}{=} f'_{ki}(a_i)\, f_{ki}(x_i) = f'_{kj}(a_j)\, f_{kj}(x_j) = f_{kj}(a_j x_j)$

(*) car f_{ji} est f'_{ji}-linéaire

donc, par définition : $\quad \dot{\overline{a_i x_i}} = \dot{\overline{a_j x_j}}$.

CQFD

(R3) 5.5 p27

$f : X \to Y$ continue $\mathcal{F}$ = faisceau de $\underline{A}$-module sur Y	$\Rightarrow f^{-1}\mathcal{F}$ = faisceau de $f^{-1}\underline{A}$-module sur X

preuve : $f^{-1}\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes car $\mathcal{F}$ l'est. Si $U \Subset X$,

$f^{-1}\mathcal{F}(U) = \{t : U \to \mathcal{F} \text{ continue} \,/\, \pi\circ t = f\}$

$f^{-1}\underline{A}(U) = \{\alpha : U \to \underline{A} \text{ continue} \,/\, \pi\circ\alpha = f\}$

$\forall \alpha \in f^{-1}\underline{A}(U)$ $\forall t \in f^{-1}\mathcal{F}(U)$ $\alpha . t : U \longrightarrow \mathcal{F}$ est bien
$x \longmapsto \alpha(x).t(x)$
défini car $\alpha(x) \in \underline{A}_{f(x)}$, $t(x) \in \mathcal{F}_{f(x)}$ et $\mathcal{F}_y = A_y$-module (cf R2) et l'on possède donc un élément $\alpha . t \in f^{-1}\mathcal{F}(U)$. Ce produit vérifie les axiomes de module (car ils sont vérifiés fibre à fibre).

(R3) Note (pouvant servir dans l'étude des $\mathcal{D}$-modules)

Si A et B sont 2 faisceaux de groupes abéliens ou d'anneaux, Hom(A, B) désigne l'espace des morphismes de faisceaux de A vers B.
Le faisceau $\mathcal{H}om$(A, B) est, par définition, le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{H}om(A,B)(U) = \mathrm{Hom}(A|_U, B|_U)$ (qui est déjà un faisceau), où $A|_U$ (resp $B|_U$) désigne le faisceau restriction de A (resp. B) sur U.

Attention :

$$\mathcal{H}om(A,B)_x \neq \mathrm{Hom}(A_x, B_x) \quad \text{en général}$$

On a seulement un morphisme

$$\mathcal{H}om(A,B)_x \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_x, B_x)$$

qui est ni injectif ni surjectif et qui est obtenu par passage à la limite inductive dans $\varphi(U)(U) : A(U) \longrightarrow B(U)$, où $\varphi(U) : A|_U \longrightarrow B|_U$ désigne un morphisme de faisceaux de germe l'élément de départ dans $\mathcal{H}om(A,B)_x$

Proposition : Si A est un faisceau d'anneaux cohérent, on a :

$$\mathcal{H}om(A,B)_x = \mathrm{Hom}(A_x, B_x)$$

ex : $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(M, I)_x = \mathrm{Hom}(M_x, I_x)$ où M = $\mathcal{D}$-module cohérent (cf. livre de PHAM)

[exposé de Maisonobe
ref : Cours de Frisch]

Chap 1. **Fonctions holomorphes et Fonctions analytiques**

E ev dim finie sur $\mathbb{C}$

F Banach sur $\mathbb{C}$, $L_{\mathbb{C}}(E,F)$ = appl. $\mathbb{C}$-lin. cont de E dans F

1. Fonctions holomorphes, Formule de Cauchy

$U \Subset E \xrightarrow{f} F$

$$\begin{cases} f(y) = f(x) + df_x(y-x) + \varepsilon(y-x).(y-x) \\ \lim_{y\to x} \varepsilon(y-x) = 0 \\ df_x \in L_{\mathbb{R}}(E,F) \end{cases}$$ différentiable au sens réel

Lemme : $L_{\mathbb{R}}(E,F) = L_{\mathbb{C}}(E,F) \oplus L_{\mathbb{C}}(\overline{E},F)$ → par définition, le produit dans $\overline{E}$ est : $\boxed{\lambda . \vec{x} = \overline{\lambda}\vec{x}}$

preuve : $f(\vec{x}+i\vec{y}) = f_1(\vec{x}+i\vec{y}) + f_2(\vec{x}+i\vec{y})$

$f(\vec{x}) + f(i\vec{y}) = f_1(\vec{x}) + if_1(\vec{y}) + f_2(\vec{x}) - if_2(y)$ (car $i\vec{y}$ ci-dessus représentait le produit dans $\overline{E}$.)

d'où $\begin{cases} if(i\vec{y}) = -f_1(\vec{y}) + f_2(\vec{y}) \\ f(\vec{y}) = f_1(\vec{y}) + f_2(\vec{y}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(\vec{y}) = \frac{1}{2}(f(\vec{y}) - if(i\vec{y})) \\ f_2(\vec{y}) = \frac{1}{2}(f(\vec{y}) + if(i\vec{y})) \end{cases}$

Ils conviennent.

Définition : Soit $f : U \Subset E \to F$. On dit que f est holomorphe sur U si $\forall x \in U$, f est continûment différentiable en x au sens réel et si $df_x \in L_{\mathbb{C}}(E,F)$, $\forall x \in U$

$E = \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ $\qquad df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i$

$(\vec{e}_1, i\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, i\vec{e}_n)$

$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ $\qquad z_i = x_i + iy_i$

Par le lemme, $dx_i = \frac{1}{2}(dz_i + d\overline{z}_i)$, puisque $\begin{cases} dz_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = z_1 \\ d\overline{z}_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \overline{z}_1 \end{cases}$

De même $dy_i = \frac{1}{2i}(dz_1 - d\overline{z}_1)$

Donc $df = \sum \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) dz_k + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) d\bar{z}_k$

$$\boxed{df = \sum \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) dz_k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) d\bar{z}_k}$$

Proposition : Soit f de classe C^1 sur U. f est holomorphe sur U ssi $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k} = 0$

Théorème : U ouvert de $\mathbb{C}^n$

$a \in U \quad a = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)$

γ_k courbe d'indice 1 autour de a_k / $\prod \gamma_k \subset U$ (ensembliste)

f holomorphe dans U

$$f(a) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_{\prod \gamma_k} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - a_1)\dots(\zeta_n - a_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

preuve : Récurrence sur n.

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - a_1)\dots(\zeta_n - a_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n = \int_{\prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k} \frac{1}{(\zeta_1 - a_1)\dots(\zeta_{n-1} - a_{n-1})} d\zeta_1 \dots d\zeta_{n-1} \underbrace{\int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta_n - a_n} d\zeta_n}_{i2\pi \cdot f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, a_n)}$$

d'après Cauchy à 1 variable

$$= i2\pi \int_{\prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, a_n)}{(\zeta_1 - a_1)\dots(\zeta_{n-1} - a_{n-1})} d\zeta_1 \dots d\zeta_{n-1}$$

CQFD

Réciproque : Si $\begin{cases} f(z) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ \forall z \in V \subset U, \ V \text{ disjoint de } \gamma \end{cases}$ (not. abrégées)

Alors f est holomorphe sur V.

preuve : Vérifier les équations de Cauchy $\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$
Dériver sous le signe somme

Corollaire : Formule de la moyenne

$\gamma_k = D(a_k, \rho_k)$

$\gamma = \prod \gamma_k \subset U \subset \mathbb{C}$ $\quad f(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} f(a_1+\rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, a_n+\rho_n e^{i\theta_n}) \, d\theta_1 \dots d\theta_n$

~~$\forall f \in \mathcal{C}^\omega(U)$~~

$\forall f$ holomorphe sur U

Notation : $\quad \|f\|_A = \sup_{a \in A} \|f(a)\|$, où $f : A \to F$ bornée sur $A \subset E$.

Principe du Maximum : Soit $f : U \to F$ holomorphe (a) Si f admet un maximum local en x_0, alors $\|f\|$ est constante au voisinage de x_0 (Si $F = \mathbb{C}$, la fonction est elle même constante.)

(b) K compact de U $\quad \exists x_0 \in \partial K \quad \|f\|_K = \|f(x_0)\|$

(c) $E = E' \times E''$

$K = K' \times K''$ produit de 2 compacts, inclus dans U

$\exists x_0', x_0'' \in \partial K' \times \partial K'' \quad f(x_0', x_0'') = \|f\|_K$

(a) $\quad U$, x_0

$\|f(z)\| \leq \|f(x_0)\| \quad \forall z \in U$ vois de x_0

Si $F = \mathbb{C}$, $\quad \|f(z)\| = \text{cte}$;

~~$\|f\| = \text{cte}$ sur V_0 $\Rightarrow f = f(0)$ sur V_0~~ ?

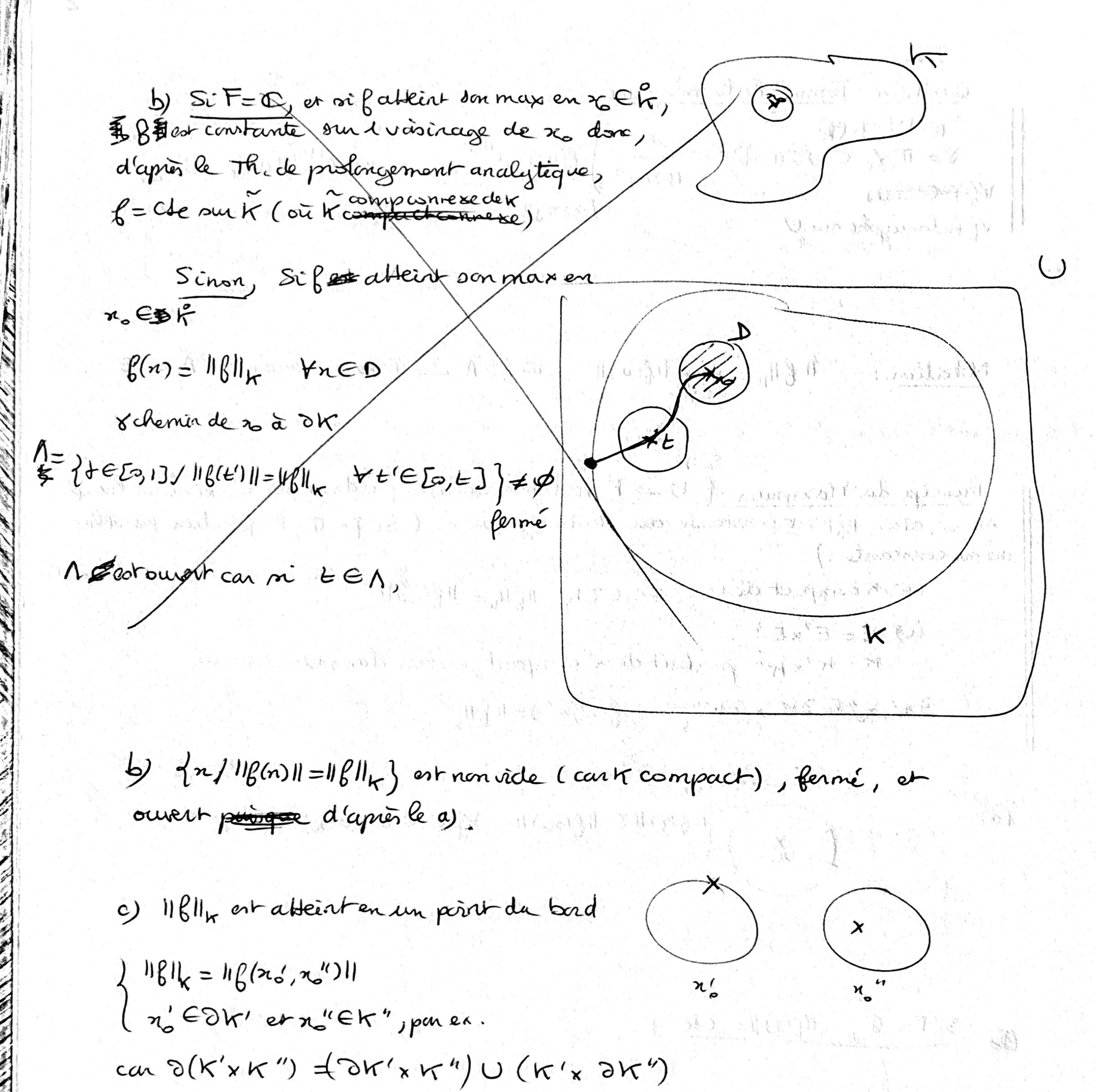
~~$f(z) = f(0) + \lambda z + \varepsilon(z) z$~~

$f(0)$, 0

$$f(0) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z} = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(0)\,dz}{z} \quad f(z) = f(0) e^{i\theta(z)} \Rightarrow \int_\gamma \frac{e^{i\theta(z)} - 1}{z} dz = 0$$

$e^{i\theta(z)}$

partie reelle $\Rightarrow \theta(z) = 0 \quad \forall z$.



b) ~~Si $F = \mathbb{C}$, et si f atteint son max en $x_0 \in \mathring{K}$, f est constante sur le voisinage de x_0 donc, d'après le Th. de prolongement analytique, $f = C^{te}$ sur $\tilde{K}$ (où $\tilde{K}$ comp connexe de K)~~

~~Sinon, Si f atteint son max en $x_0 \in \mathring{K}$~~

~~$f(x) = \|f\|_K \quad \forall x \in D$~~

~~γ chemin de x_0 à ∂K~~

~~$\Lambda = \{t \in [0,1] / \|f(t')\| = \|f\|_K \quad \forall t' \in [0,t]\} \neq \emptyset$~~ ~~fermé~~

~~Λ est ouvert car si $t \in \Lambda$,~~

b) $\{x / \|f(x)\| = \|f\|_K\}$ est non vide (car K compact), fermé, et ouvert ~~puisque~~ d'après le a).

c) $\|f\|_K$ est atteint en un point du bord

$$\begin{cases} \|f\|_K = \|f(x_0', x_0'')\| \\ x_0' \in \partial K' \text{ et } x_0'' \in K'', \text{ par ex.} \end{cases}$$

car $\partial(K' \times K'') = (\partial K' \times K'') \cup (K' \times \partial K'')$

$f(x_0', x)$ est anal. sur l vois de K'', donc atteint son maximum en un point de $\partial K''$, disons en $y_0'' \in \partial K''$. Ainsi :

$$\|f(x_0', x)\|_{K''} = \|f(x_0', y_0'')\|$$

Or $\|f(x_0', x)\|_{K''} \geq \|f\|_K = \|f(x_0', x_0'')\| \geq \|f(x_0', y_0'')\|$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|f\|_K = \|f(x_0', y_0'')\|}$$

Résumé : Si E et F sont 2 Banachs, E de dimension finie, et si U est un ouvert de E, on dit que $f : U \longrightarrow F$ est holomorphe si

1) f est de classe C^1
2) $df(x) \in L_{\mathbb{C}}(E,F)$

On possède alors les 2 outils :

① Théorème de Cauchy : $$f(z) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\dots(\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

② Principe du maximum.

2. Fonctions analytiques

Définition : Un polynôme homogène de degré k est une application $p : E \to F$ telle que $p = P \circ \delta$ où $P : E^k \longrightarrow F$ est une appl. multilinéaire et où $\delta : E \longrightarrow E^k$ désigne l'appl. diagonale $\delta(x) = (x, \dots, x)$.

ex : $p : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x_1, x_2) \longmapsto x_1 x_2^3$ correspond à $P : (\mathbb{C}^2)^4 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \longmapsto \alpha_1 \beta_2 \gamma_2 \delta_2$ (où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$, etc...)

Lemme : Si $p : E \to F$ est un polynôme homogène de degré k, il existe une et une seule application multilinéaire symétrique $P : E^k \to F$ telle que $p = P \circ \delta$.

Définition : P s'appelle alors l'application mult. sym. associée à $p : E \to F$

preuve : Si P n'est pas symétrique, on prend $\tilde{P} = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \frac{1}{k!} P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$ de sorte que $\tilde{P} \circ \delta = P \circ \delta = p$.

Unicité : Posons $\Delta_x f(y) = \frac{1}{2}(f(y+x) - f(y-x))$

On a :

$$(\Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_k}) P \circ \delta = k! \, P(x_1, \dots, x_k) \text{ (= appl. constante)} \quad (1)$$

ce qui prouve l'unicité, puisqu'en tenant compte de (1) :

$$\left. \begin{array}{l} P \text{ symétrique} \\ P \circ \delta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P \equiv 0$$

Montrons donc (1) :

$$\Delta_{x_k}(P\delta(y)) = \Delta_{x_k} P(y, \dots, y) = \frac{1}{2}(P\delta(x_k + y) - P\delta(y - x_k))$$

$$= \frac{1}{2}(P(x_k + y, \dots, x_k + y) - P(y - x_k, \dots, y - x_k))$$

$$= \underbrace{k \, P(y, \dots, y, x_k)}_{\text{polynôme de degré } k-1 \text{ en } y} + \underbrace{\dots}_{\text{poly. de deg} \leq k-2} \quad \text{(par linéarité)}$$

Par récurrence sur k, on obtient :

$\Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_k}(P \circ \delta)(y) = k! \, P(x_1, \dots, x_k)$, puisque $\Delta_x f = 0$ si $f = $ Cte.

Proposition (Écriture d'un polynôme homogène)
L'application $p : \mathbb{C}^n \to F$ est un polynôme homogène de degré k ssi il s'écrit

$$p(x) = \sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_n = k} a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$$

De plus, cette écriture est unique.

preuve :
$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ $\quad p(x) = P\left(\sum x_i e_i, \dots, \sum x_i e_i\right)$ et P est n-linéaire,
donc :

$$p(x) = \sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_n = k} a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$$

L'unicité se montre par dérivation, et récurrence.

CQFD

Définition : Soit $p : E \to F$ un polynôme homogène de degré k.
On définit la norme $\|p\| = \|\tilde{P}\|$ où $\tilde{P}$ désigne l'appl. multilinéaire symétrique correspondant à p (ie. vérifiant $p = \tilde{P} \circ \delta$)
Ainsi : $\quad \|p\| = \|\tilde{P}\| = \sup_{\|t_i\| \leq 1} \|P(t_1, \dots, t_k)\|$

On obtient $\|p(x)\| = \|\tilde{P}(x, \dots, x)\| \leq \|\tilde{P}\| \, \|x\|^k$, où $\|p(x)\|$ désigne la norme usuelle de F, donc :

$\forall x \in E \quad \forall p$ polyn. hom. de deg. k $\quad \boxed{\|p(x)\| \leq \|p\| \, \|x\|^k}$

Remarque : Tout polynôme homogène de degré k est holomorphe.
En effet, $p : E \to F$ est de classe C^1 sur E puisque
$\forall h \in E \quad \forall x \in E \quad dp(x)(h) = k P(x, \dots, x, h) \quad (dp(x) \in \mathcal{L}(E,F))$ donc $dp(x) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,F)$.
Notons $dp : E \to \mathcal{L}(E,F)$
$\quad x \mapsto dp(x)$
$dp(x)$ est un polynôme homogène de degré $k-1$ de E dans $\mathcal{L}(E,F)$
puisque $dp(x) = S \circ \delta(x)$ où $\quad S : E^{k-1} \to \mathcal{L}(E,F)$, $\quad (t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto k P(t_1, \dots, t_{k-1}, \cdot)$ est une appl. multilinéaire.
Enfin, on a la formule :

$$\boxed{\|dp\| \leq k \|p\|}$$

puisque : S est mult. symétrique dès que P l'est, alors :

$$\|dp\| \doteq \|S\| = \sup_{\|t_1\|, \dots, \|t_{k-1}\| \leq 1} \|k P(t_1, \dots, t_{k-1}, \cdot)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \sup_{\substack{\|t_1\|, \dots, \|t_{k-1}\| \leq 1 \\ \text{et } \|h\| \leq 1}} \|k P(t_1, \dots, t_{k-1}, h)\|$$

$$= k \, \|p\|$$

<u>Définition</u> : U ouvert de E ; $f : U \to F$ et $a \in U$.
On dit que f est <u>analytique en a</u> s'il existe $r>0$ et des polynômes homogènes f_k de degré k, $k \in \mathbb{N}$, tels que

$$1)\ \sum_{k\geq 0} \|f_k\| r^k < \infty$$

$$2)\ f(a+x) = \sum_{k \geq 0} f_k(x) \quad (\text{pour } x \in E \text{ assez petits})$$

f est dite analytique sur U si f est analytique en tout pt de U.

NB : La condition 1) implique la convergence normale de la série 2) pour $\|x\| \leq r$, puisque $\sum_{k\geq 0} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k\geq 0} \|f_k\| r^k < \infty$.

<u>Proposition</u> : f est analytique en a $\Leftrightarrow$ f est holomorphe au voisinage de a.

preuve :
($\Leftarrow$) Th. de Cauchy, comme dans le cas $n=1$.
($\Rightarrow$) (cf conditions banachiques) f est de classe C^1 en a car 2) montre que f dérivable au voisinage de a et $f'(a+x) = \sum_{k\geq 0} df_k(x)$: En effet, $\sum k \|f_k\| r^k < \infty$ donc $\sum \|df_k\| r^k < \infty$.
(<u>Rappel</u> : Soit $f_n : U \to F$ dérivables. Si $\sum f_n'(x)$ converge normalement vers f sur U et si il existe $x_0 \in U$ tel que $\sum f_n(x_0)$ converge, alors la série $\sum f_n(x)$ est uniformément convergente de somme $f(x)$, $f(x)$ est dérivable et $f'(x) = \sum f_n'(x)$ - cf "Analyse", Coutz Ezra, coll. U)
On vérifie alors que $df(a+x) = \sum_{k\geq 0} df_k(x)$ est bien $\mathbb{C}$-linéaire ($df(a+x)$ est C^1).

CQFD

3. <u>Sur certains espaces de Banach</u>

On note : $U \Subset E$ E, F e.v. $\dim E < \infty$ et F Banach
$\underline{C}(U,F)$ = fonctions continues de U dans F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.
$\underline{O}(U,F)$ = fonctions holomorphes de U dans F, muni de la topologie induite par $\underline{C}(U,F)$

<u>Proposition 3.1</u> : $\underline{O}(U,F)$ est fermé dans $\underline{C}(U,F)$

preuve : Soit $(f_n)_n$ une suite convergente vers $f \in \underline{C}(U,F)$ telle que $f_n \in \underline{O}(U,F)$
On doit montrer que f est analytique. Le problème est local.

$$f_n(y) = \frac{1}{(i2\pi)^n}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - y}\, d\zeta$$

$\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - y}$ converge uniformément vers $\frac{f(\zeta)}{\zeta - y}$ pour $\zeta \in \gamma$ et y fixé,

donc $f_n(y) \longrightarrow \frac{1}{(i2\pi)^n}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - y}\, d\zeta = f(y) \Rightarrow f$ analytique en a.

CQFD

Remarques:

Notons $\underline{C}(U) = \underline{C}(U, \mathbb{C})$ et $\underline{\mathcal{O}}(U) = \underline{\mathcal{O}}(U, \mathbb{C})$.

Si K est compact, $\underline{C}(K, F)$ et $\underline{C}(K)$ sont des Banach (ie des evnormés complets)

Posons $\underline{B}(K,F) = \{ f \in \underline{C}(K,F) \,/\, f$ holomorphe sur $\mathring{K} \}$. Alors on a facilement:

Proposition 3.2 : $\underline{B}(K,F)$ est fermé dans $\underline{C}(K,F)$

Proposition 3.3 :

Soient K = compact convexe d'intérieur non vide de E

$f \in \underline{B}(K,F)$

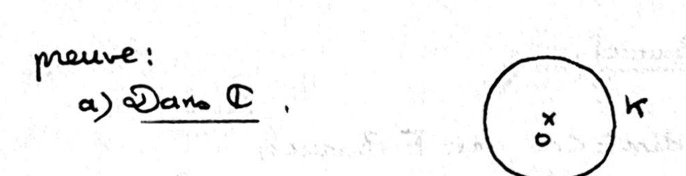
Alors:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists U$ voisinage ouvert de $K \;\; \exists g \in \underline{\mathcal{O}}(U,F) \,/\, \|f - g\|_K < \varepsilon$

(En d'autres termes $\mathcal{O}(K) = \varinjlim_{K \subset U \subset E} \mathcal{O}(U) = \underline{B}(K,F)$)

preuve:

a) Dans $\mathbb{C}$.



Prenons K = disque $\bar{D}(0,1)$ de $\mathbb{C}$. Comme f est uniformément continue sur K,

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Si $y = tx$, $\quad |1-t|\,\|x\| \leq \eta \Leftarrow |1-t| \leq \frac{\eta}{\sup_{x \in K}\|x\|}$. Ainsi

$$|1-t| < \frac{\eta}{\sup_{x\in K}\|x\|} \Longrightarrow |f(x) - f(tx)| \leq \varepsilon$$

($tx \in K$ dès que $0, x \in K$ pour $t \in]0,1[$ car K convexe)

On peut choisir $0 < t < 1$ (prendre $t = 1 - \frac{\eta}{\sup_{x \in K} \|x\|}$ où $\eta < \sup_K \|x\|$)

b) Cas général :

$\overset{\circ}{K} \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in \overset{\circ}{K}$.

Soit $h_t : K \longrightarrow E$, $x \longmapsto a + t(x-a)$ l'homothétie de centre a et de rapport t de E, où $t > 1$.

$h_t(K)$ est un voisinage de K et $U \doteqdot \overset{\circ}{\overline{h_t(K)}}$ est tel que $f_t \doteqdot \underline{f \circ h_t^{-1}}$ soit holomorphe sur U (car h_t^{-1} est holomorphe sur U et $h_t^{-1}(h_t(K))$ est ouvert dans K, donc $f \circ h_t^{-1}$ est la composée de 2 fcts holomorphes)
De plus, l'uniforme continuité de f sur K, comme dans le a), donne :

$$\lim_{t \to 1} \|f_t - f\|_K = 0$$

CQFD

peut être fausse

Proposition 3.4 : E', E'' = espaces vectoriels de dimension finie
K', K'' = convexes compacts d'intérieur non vide, $K' \subset E'$ et $K'' \subset E''$

$$\underline{B}(K' \times K'') \longrightarrow \underline{B}(K', B(K'')) \quad \text{est une isométrie (ie une}$$
$$f \longmapsto \{x' \underset{\tilde{f}}{\longmapsto} f(x', \cdot)\}$$

application linéaire qui conserve la norme)

preuve : * $B(K'')$ = Banach car K'' compact

* $f(x', \cdot) \in B(K'')$ car $f(x', x'')$ holomorphe sur $\overset{\circ}{\overline{K' \times K''}} = \overset{\circ}{K'} \times \overset{\circ}{K''}$ si $x' \in \overset{\circ}{K'}$

Si $x' \in \partial K'$, $x'_n \to x'$ $x'_n \in \overset{\circ}{K'}$ (*) $f(x'_n, x'') = g_n(x'')$

Comme f uniformément continue sur K, $g_n(x'')$ converge uniformément sur K'' vers $f(x', x'')$, et comme $\underline{B}(K'')$ est un Banach $f(x', \cdot) \in \underline{B}(K'')$

* $\tilde{f} : K' \to B(K'')$ est continue car f est unif. continue sur K.

* $\tilde{f} : \overset{\circ}{K'} \to B(K'')$ est analytique : ?

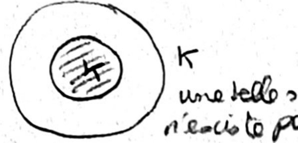
$$f(x', x'') = f(x'_0, x'') + \underline{D_1 f(x'_0, x'')}(x' - x'_0) + \|x' - x'_0\| \, \varepsilon(x' - x'_0, x'')$$

différentielle de la fct holomorphe $f(\cdot, x'')$
donc $\mathbb{C}$-linéaire

* $\|\tilde{f}\| = \sup_{x' \in K'} \|f(x', \cdot)\| = \sup_{(x', x'') \in K' \times K''} \|f(x', x'')\|$ (car $\sup_x \sup_y f(x,y) = \sup_{x,y} f(x,y)$)

CQFD

(*) Une telle suite existe car K' convexes compacts d'int. non vide. Cex :



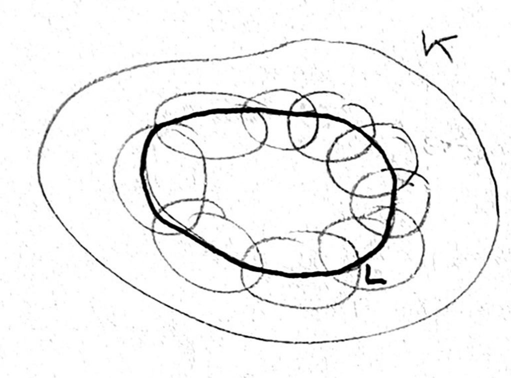
Proposition 3.5 :
L, K compacts de $\mathbb{C}$ / $L \subset \mathring{K}$ et $\mathring{L} \neq \emptyset$
Alors l'opérateur de restriction $\rho : B(K) \longrightarrow B(L)$ est un opérateur compact.

preuve :
$B(K)$ = fermé dans $C(K)$ et $C(K)$ Banach $\Rightarrow B(K)$ banach.
Soit B_K la boule unité de $B(K)$, alors $\rho(B_K)$ est relativement compact dans $C(L)$?
On utilise le Th. d'Ascoli :

* $\rho(B_K)$ est simplement borné ie $\sup_{f \in B_K} |\rho(f(x))| \leq 1$ (pour tout $x \in L$)
* $\rho(B_K)$ équicontinue en tout point ie :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad |x - x'| < \eta \Rightarrow \forall f \in B_K \quad |f|_L(x) - f|_L(x')| < \varepsilon$$

Il suffit de montrer que $\exists c > 0 \quad \|df\|_L \leq c$



$K \subset \bigcup_{\substack{i \text{ fini} \\ i \in J}} K_i \qquad L_i \subset \mathring{K}_i$
$L \subset \bigcup_{\substack{i \text{ fini} \\ i \in J}} L_i$
} c'est possible car $L \subset \mathring{K}$

Majorer $\|df\|_{L_i}$

$$f(z) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(z) = \frac{1}{(i2\pi)^n} \int_\gamma - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_i)} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

Prenons γ = bord de K_i
$(d(L_i, \complement \mathring{K}_i) > 0)$



$\rho_1, \dots, \rho_n$ = rayons de K_i
$\delta_1, \dots, \delta_n$ = différences des rayons de K_i et L_i.

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(z) \leq \frac{\|f(\zeta)\|_{K_i}}{\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_n} \rho_1 \dots \rho_n$$

$$\sup_{L_i} \left| \frac{\partial f}{\partial z_i}(z) \right| \leq \frac{\|f\|_{K_i}}{\delta_1 \dots \delta_i^2 \dots \delta_n} \rho_1 \dots \rho_n = C_i$$

(1) $\|df\|_{L_j} \leq \sup_{i \in J} \left\| \frac{\partial f}{\partial z_i} \right\|_{L_j}$ en prenant ($\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum \|x_i\|$ norme dans E)
$df = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \Rightarrow (1)$)

$\Downarrow$

$$\|df\|_L \leq \sup_{\substack{j \in J \\ \text{fini}}} \|df\|_{L_j}$$

3. <u>Rappels sur les Banach</u>

F', F'' Banachs

* $V = \mathrm{Isom}(F', F'')$ ouvert de $\mathcal{L}(F', F'')$ — $\mathrm{Isom}(F', F'')$ = isomorphismes de $F' \to F''$ appl. lin. bij. bicontinue

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{L}(F'', F') \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^{-1} \end{array}$$ est différentiable C^1

$$d\theta(\varphi)(h) = -\varphi^{-1} h \varphi^{-1} \qquad d\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(F', F''), \mathcal{L}(F'', F'))$$

* U ouvert. Soit : $$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{L}(F', F'') \\ s & \longmapsto & \varphi_s \end{array}$$ <u>analytique</u>,

et $\forall s \in U$ φ_s est un isomorphisme. On peut définir l'application

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{\nu}} & \mathcal{L}(F'', F') \\ s & \longmapsto & \varphi_s^{-1} \end{array}$$

$d\tilde{\nu}(s)(n) = -\varphi_s^{-1}(d\varphi_s)_s(n)\,\varphi_s^{-1}$ est $\mathbb{C}$-linéaire et $\tilde{\nu}$ est C^1 sur U, donc <u>$\tilde{\nu}$ est analytique</u>.

Chapitre 2 — **Algèbre locale**

Tous les anneaux seront commutatifs et unitaires.

1. Anneaux locaux

Proposition 1.1 : Soit A un anneau. Les 2 prop. suiv. sont ~ :
(1) A possède un seul idéal maximal.
(2) les éléments non inversibles de A forment un idéal.

preuve :
Notons $\mathfrak{M}$ l'ensemble des éléments non inversibles de A.
(1) ⇒ (2) : Notons $\mathfrak{I}$ l'unique idéal maximal de A. Alors $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{M}$
$\forall x \in \mathfrak{M}$ $Ax \neq A$ donc (cf. Th. de Zorn) $Ax \subset \mathfrak{I}$, donc $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{I}$
Finalement $\mathfrak{I} = \mathfrak{M}$
(2) ⇒ (1) : Tout idéal propre de A est contenu dans l'ensemble des éléments non inversibles.
CQFD

Définition 1.2 : Un anneau local est un anneau qui vérifie l'une des 2 conditions ~ de la proposition 1.1. On notera $\mathfrak{M}$ l'unique idéal maximal de A. On dit que $A/\mathfrak{M}$ est le corps résiduel de A.

exemple : L'anneau $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ des germes de fonctions analytiques en 0 est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{M} = (x_1, \dots, x_n)$ puisque l'ensemble des éléments non inversibles $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ c'est égal à l'ensemble des $f \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ tels que $f(0) = 0$, forme un idéal.

Fixons $f_1, \dots, f_p \in \mathfrak{M}$. Alors $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}/(f_1, \dots, f_p) \neq 0$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{M}/(f_1, \dots, f_p)$.
En effet, si $m \in \mathfrak{M}/(f_1, \dots, f_p)$, m n'est pas inversible sinon $mg \equiv 1 \ (f_1, \dots, f_p)$ ce qui est absurde puisque $m(0) = f_i(0) = 0 \ \forall i$.
Si $m \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}/(f_1, \dots, f_p)$ n'appartient pas à $\mathfrak{M}/(f_1, \dots, f_p)$, on montre que

$\dot{m}$ est inversible : $m(0) \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{1}{m} \in \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\} \Rightarrow \dot{m} \cdot \dot{\frac{1}{m}} = \dot{1}$
dans $\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}/(f_1,\dots,f_p)$

1.3 Lemme de Nakayama :

A = anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$
E = A-module de type fini
On a l'une des versions équivalentes suivantes :

(1) $\mathfrak{m}E = E \Rightarrow E = 0$

(2) $E \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0 \Rightarrow E = 0$

(3) $E/\mathfrak{m}E = 0 \Rightarrow E = 0$

preuve:
Montrons (1) : Soit $(x_1,\dots,x_n)$ un système générateur de E

$$x_1 \in E = \mathfrak{m}E \Rightarrow x_1 = \sum_{i \text{ finie}} m_i x_i \Rightarrow (1-m_1)x_1 = \sum_{i \neq 1} m_i x_i$$

Or $1-m_1$ est inversible (En effet, m non inversible $\Rightarrow 1-m$ inversible sinon $1 = m + n$ où n non inversible, ce qui est absurde car l'anneau étant local, l'ensemble des él. non inversibles forment un idéal propre de A)
Ainsi $(x_2,\dots,x_n)$ est encore un système générateur de E. Par récurrence finie, on obtient : (x_n) engendre E. Mais on recommence :

$$x_n = m x_n \quad m \in \mathfrak{m} \Rightarrow (1-m)x_n = 0 \quad \text{où } 1-m \text{ inversible} \Rightarrow x_n = 0$$

Donc $E = 0$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) trivial
(1) $\Leftrightarrow$ (2) Il s'agit de vérifier l'équivalence

$$\mathfrak{m}E = E \Leftrightarrow E \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$$

On a la suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \overset{i}{\hookrightarrow} A \longrightarrow A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

Le foncteur $\otimes$ est exact à droite, donc, en notant $i_* = id_E \otimes i$:

$$E \otimes \mathfrak{m} \xrightarrow{i_*} E \otimes A \longrightarrow E \otimes A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

$e \otimes m \longmapsto e \otimes m$, $e \otimes m \mapsto me$, $E \otimes A \overset{\wr}{\to} E$

On a $\mathrm{Im}\, i_* = \mathcal{M}E$, donc $\boxed{E \otimes A/\mathcal{M} = E/\mathcal{M}E}$

CQFD

Remarque : D'après la suite (*), on a :
$\{x_i \otimes \dot{1}\}_{1 \leq i \leq n}$ engendrent $E \otimes A/\mathcal{M}$ $\Longleftrightarrow$ $\{\dot{x}_i\}$ engendrent $E/\mathcal{M}E$

Le lemme de Nakayama est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 1.4 :
A = anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}$
E = A-module de type fini
Si $x_1, \ldots, x_n \in E$ sont tels que $x_1 \otimes \dot{1}, \ldots, x_n \otimes \dot{1}$ engendrent $E \otimes A/\mathcal{M}$, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de générateurs de E.

preuve : On pose $Q = E/(x_1, \ldots, x_n)$ et $u : E^n \longrightarrow E$, $(1, 0, \ldots, 0) \longmapsto x_1$, $\ldots$

La suite exacte $E^n \xrightarrow{u} E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ donne la suite exacte suivante par tensorisation :

$$E^n \otimes A/\mathcal{M} \xrightarrow{u_*} E \otimes A/\mathcal{M} \longrightarrow \underbrace{Q \otimes A/\mathcal{M}}_{= 0 ?} \longrightarrow 0$$

$$\begin{cases} u_*((1, 0, \ldots, 0) \otimes \dot{1}) = x_1 \otimes \dot{1} \\ \ldots\ldots \\ u_*((0, \ldots, 1) \otimes \dot{1}) = x_n \otimes \dot{1} \end{cases}$$

Donc u_* est surjective par hypothèse. Mais alors $Q \otimes A/\mathcal{M} = 0$ et le lemme de Nakayama donne $Q = 0 \Leftrightarrow E = (x_1, \ldots, x_n)$.

CQFD

2. Anneaux noethériens

Définition 2.1 : Un A-module M est dit noethérien ssi l'une des assertions équivalentes suivantes est vraie :
(1) Toute suite croissante de sous-modules est stationnaire.
(2) Tout sous-module de M est de type fini.
(3) Toute famille non vide de sous-modules de M possède un élément maximal.

(1) ⇒ (2) $(x_0), (x_0, x_1), \dots, (x_0, x_1, \dots, x_n), \dots$ est une suite stationnaire, donc $(x_0, \dots, x_n)$ engendrent le sous-module N pour n grand.
(2) ⇒ (1) $M_n \subset M_{n+1}$ et $M' = \bigcup_n M_n$ est un sous-module de M, donc de type fini. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système générateur de M' et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_1, \dots, x_n \in M_{n_0}$. Alors $n \geq n_0 \Rightarrow M_n = M_{n_0} = M'$.

(1) ⇔ (3) lemme : T ensemble ordonné. Alors :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Toute famille non vide d'éléments}\\ \text{de } T \text{ admet un élément maximal}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Toute suite croissante } \{t_n\}_{n\geq 0}\\ \text{d'él. de } T \text{ est stationnaire.}\end{array}\right.$$

preuve du lemme :
(⇒) Si $\{t_n\}_n$ est une suite croissante, $\{t_n\}_n \subset T$ et $\{t_n\}_n \neq \emptyset$ donc $\{t_n\}$ possède un él. maximal t_k. Alors $t_n \geq t_k \Rightarrow t_n = t_k$.
(⇐) $S \subset T$ $S \neq \emptyset$ S sans élément maximal.
Prenons alors $t_0 \in S$. Il existe $t_1 \in S$ / $t_0 < t_1$, et par récurrence $\exists\, t_{n+1} \in S$ / $t_n < t_{n+1}$. On obtient alors une suite croissante $\{t_n\}_n$ non stationnaire, ce qui est absurde.

CQFD

Un anneau A est dit noethérien si, considéré comme A-module, c'est un module noethérien ; en d'autres termes A est un anneau noethérien ssi il satisfait à la condition de chaîne ascendante : "Toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire". Ainsi, un anneau principal est noethérien.

Proposition 2.2 :
A = anneau
M = A-module
M' = sous-module de M
Alors :

$$M \text{ noethérien} \Leftrightarrow M' \text{ et } M/M' \text{ noethériens.}$$

preuve :
(⇒) Soit M noethérien. L'ensemble ordonné des sous-modules de M' (resp. de M/M') est en bijection croissante avec l'ensemble ordonné des sous-modules de M contenus dans M' (resp. contenant M').
(⇐) Si M' et M/M' sont noethériens, soit $\{F_n\}_{n\geq 0}$ une suite croissante de sous-modules de M.
Comme M' noethérien, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq n_0 \Rightarrow F_n \cap M' = F_{n_0} \cap M'$

Comme $M/_{M'}$ noethérien, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_1 \Rightarrow F_n + M'/_{M'} = F_{n_1} + M'/_{M'} \Rightarrow F_n + M' = F_{n_1} + M'$$

Alors $n \geq \sup(n_0, n_1) \Rightarrow F_n = F_{n+1}$. Il suffit de voir $F_{n+1} \subset F_n$. Soit $x \in F_{n+1}$. Comme $F_{n+1} + M' = F_n + M'$, il existe $y \in F_n$ $\exists z', z'' \in M'$ tels que $x + z' = y + z''$ d'où $x - y = z'' - z' \in F_{n+1} \cap M' = F_n \cap M'$ donc $x - y \in F_n$ d'où $x \in F_n$ car $y \in F_n$. Finalement $F_{n+1} = F_n$.

CQFD

Corollaire 2.3 : Si M et N sont des A-modules noethériens, alors $M \times N$ est un A-module noethérien.

preuve: $M \simeq M \times \{0\} \subset M \times N$. $M \times \{0\}$ noethérien et $M \times N/_{M \times \{0\}} \simeq N$ noethérien, donc $M \times N$ noethérien d'après la pro. 2.2.

Autre méthode : Soit F un sous-module de $M \times N$, et $\pi_1 : M \times N \longrightarrow M$ la proj. canonique. $\pi_1(F)$ est un sous-module de M, donc de type fini. Notons $(m_1, \dots, m_p)$ un syst. générateur de $\pi_1(F)$. Il existe $(m_i, n_i) \in F \subset M \times N$ tels que $\pi_1(m_i, n_i) = m_i$.

$\forall x \in F$ $\pi(x) \in \pi_1(F)$ donc $x - \sum \lambda_i (m_i, n_i) = (0, n) \in F \cap N \subset N$ (abus)
Ainsi $F \cap N$ est de type fini. Si $(0, \bar{n}_1), \dots, (0, \bar{n}_s) \in F$ engendrent $F \cap N$ (N identifié à $\{0\} \times N$), on constate que $(m_1, n_1), \dots, (m_p, n_p), (0, \bar{n}_1), \dots, (0, \bar{n}_s)$ engendrent $M \times N$.

CQFD

Corollaire 2.4 :

Soit A un anneau noethérien. Alors :

M = A-module noethérien $\Leftrightarrow$ M de type fini.

preuve:
($\Rightarrow$) trivial
($\Leftarrow$) M de type fini, donc il existe une surjection linéaire φ :

$$A^s \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0 \quad \text{donc} \quad M \simeq A^s/_R$$

où $R = \operatorname{Ker} \varphi$ est un sous-module de A^s.
A^s est noethérien d'après le Co. 2.3, donc $A^s/_R$ est noethérien d'après la Pro. 2.2.

CQFD

2.5 Théorème d'Hilbert : A noethérien $\Rightarrow$ $A[X]$ noethérien

preuve : Soit I un idéal de $A[X]$. Si $P \in A[X]$ et $\deg P = k$, on note $\gamma_k(P)$ le coefficient (dominant) de X^k de P.
Soit I_k = ensemble des coefficients en X^k des polynômes de degré k dans I $= \{\gamma_k(P) \,/\, P \in I \text{ et } \deg P = k\}$

On a :

$$I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_k \subset \dots \qquad (1)$$

(puisque $I_0 \subset I_1$ car $c \in I_0 \Rightarrow cX \in I \Rightarrow c \in I_1$, etc...)
(1) est une suite d'idéaux de A noethérien, $\{I_n\}_n$ est donc stationnaire : $\exists n \in \mathbb{N}$ $k \geq n \Rightarrow I_k = I_n$.

Considérons la famille de polynômes :

$$P_0^{(1)}, \dots, P_0^{\ell(0)}; \dots; P_n^1, \dots, P_n^{\ell(n)} \qquad (\mathcal{F})$$

tels que :

$$\begin{cases} P_k^j \in I \text{ et } \deg P_k^j = k & \forall k, j \\ (\gamma_k(P_k^1), \dots, \gamma_k(P_k^{\ell(k)})) = I_k & \forall k \end{cases}$$

<u>Alors ($\mathcal{F}$) engendre I :</u>
($\mathcal{F}$) engendre les éléments de I de degré 0.
Si ($\mathcal{F}$) engendre les éléments de degré $k < n$ de I et si $P \in I$, $\deg P = k+1$, $P - \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j P_{k+1}^j$ est de degré k, dans I (cf $c_{k+1} = \gamma_{k+1}(P) \in I_{k+1}$ donc $c_{k+1} = \sum \lambda_i \gamma_{k+1}(P_{k+1}^j))$.
Si ($\mathcal{F}$) engendre les éléments de I de degré $k \geq n$, disons pour commencer $k = n$. Soit $P \in I$ / $\deg P = n+1$. Alors $\gamma_{n+1}(P) \in I_{n+1} = I_n$ donc $\exists S \in I$ $\deg S = n$ $\gamma_n(S) = \gamma_{n+1}(P)$. Mais S est engendré par ($\mathcal{F}$), donc $X.S \in I$, $\deg X.S = n+1$ et $\gamma_{n+1}(X.S) = \gamma_{n+1}(P)$. Donc $S - XS \in I$ et $\deg(S - XS) = n$. Par hypothèse de récurrence, $S - XS$ = combinaison linéaire (dans $A[X]$) d'éléments de ($\mathcal{F}$).
Le pas général de récurrence est le même.

CQFD

<u>Remarque</u> : Ainsi $A[X_1, \dots, X_p]$ est noethérien dès que A l'est.

Corollaire 2.6 : Si A est un anneau noethérien, toute A-algèbre de type fini est noethérienne.

preuve : Si L est une A-algèbre de type fini, de système générateur $l_1, \dots, l_p$, on a un morphisme d'algèbre surjectif

$$\begin{array}{ccccc} A[X_1,\dots,X_p] & \xrightarrow{\varphi} & L & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \longmapsto & 1 & & \\ X_i & \longmapsto & l_i & & \end{array}$$

Donc $L \simeq A[X_1,\dots,X_p]/_{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ noethérien d'après 2.5 et 2.2.

3. Topologie I-adique.

Soit I un idéal de l'anneau unitaire A, fixé une fois pour toute.
$P \subset A$ est un voisinage de 0 dans A pour la topologie I-adique s'il existe $n > 0$ tel que $I^n \subset P$. Ainsi, $\{a + I^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un système fondamental de voisinages de a, et A est un anneau topologique.
Si E est un A-module, on dira que $P \subset E$ est un voisinage de 0 dans E s'il existe $n > 0$ tel que $I^n E \subset P$. Un système fondamental de voisinages de $e \in E$ est $\{e + I^n E\}_{n\in\mathbb{N}}$

Si F est un sous-module de E, on peut munir F :
* soit de la topologie I-adique de F ($\to I^n F$)
* soit de la topologie induite par la top. I-adique de E ($\to F \cap I^n E$)

On a $I^n F \subset I^n E \cap F$, et on montrera en que ces 2 topologies coïncident.

Définition 3.1 : Soit E un A-module. Une filtration de E est une suite $\{E_n\}_{n\geq 0}$ décroissante de A-modules telle que $E_0 = E$.

$$E_0 = E \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$$

La filtration $\{E_n\}$ de E est bonne si

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad I.E_n \subset E_{n+1}$
2) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow I.E_n = E_{n+1}$

3.2 Lemme clef : E = A-module
$\{E_n\}_n$ filtration de E telle que E_n de type fini $\forall n \in \mathbb{N}$.
$I.E_n \subset E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Posons $A' = A \oplus IX \oplus I^2X^2 \oplus \dots = \bigoplus_k I^k$

$E' = E_0 \oplus E_1 X \oplus E_2 X^2 \oplus \dots = \bigoplus_k E_k$

Alors E' est un A'-module et :

E' = A'-module de type finie $\Longleftrightarrow$ la filtration $\{E_n\}$ est bonne

preuve : La structure de A'-module de E' est déduite de la multiplication

$$\left(\sum a_i X^i\right)\left(\sum e_j X^j\right) = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i e_j\right) X^k$$

et c'est pour cette raison que l'on a adopté la notation polynomiale.

($\Leftarrow$) Si la filtration est bonne, soit n_0 / $n \geq n_0 \Rightarrow IE_n = E_{n+1}$, et soient a_k^i $1 \leq i \leq i(k)$ un système générateur de E_k, où $0 \leq k \leq n_0$.

Alors $\mathcal{F} = \{a_k^i X^k\}_{i,k}$ <u>engendrent E'</u> : Ils engendrent $E_j X^j$ pour $j \leq n_0$.

On a $E_{n_0+1} X^{n+1} = IE_{n_0} X^{n+1}$ engendré par les éléments de $(IX).(E_{n_0} X^n)$ et comme $E_{n_0} X^n$ est engendré par $\mathcal{F}$, $E_{n_0+1} X^{n+1}$ est engendré par $\mathcal{F}$

On continue de cette manière.

($\Rightarrow$) Soient $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p$ un système générateur de E'. Quitte à prendre toutes les composantes homogènes de ces polynômes, on peut supposer chaque $\bar{e}_j$ homogène, ie :

$$\bar{e}_j = e_j X^{n(j)} \quad \text{où } e_j \in E_{n(j)}$$

Soit $n_0 = \sup_{1 \leq j \leq p} n(j)$. <u>Montrons que $n \geq n_0 \Rightarrow IE_n = E_{n+1}$.</u>

<u>lemme</u> : $n \geq n_0 \Rightarrow E_n \subset I^{(n-n_0)} E_{n_0}$

$$\forall f \in E_n \quad \exists t_k \in A' \quad f X^n = \sum_{k=1}^{p} t_k e_k X^{n(k)}$$

$f X^n$ est homogène, donc on peut supposer que tous les t_k sont homogènes, ie $t_k = s_k X^{n-n(k)}$ où $s_k \in I^{n-n(k)}$

Donc :

$$f X^n = \left(\sum_{k=1}^{p} s_k e_k\right) X^n$$

$$\left.\begin{array}{l} e_k \in E_{n(k)} \quad \text{où } n(k) \leq n_0 \\ s_k \in I^{n-n(k)} = I^{n-n_0+(n_0-n(k))} \end{array}\right\} \Rightarrow s_k e_k \in I^{n-n_0} . I^{n_0-n(k)} E_{n(k)}$$

Mais $I^{n_0-n(k)} E_{n(k)} \subset E_{n_0}$ par hypothèse, donc $f \in I^{n-n_0} E_{n_0}$

On a montré que

$$n \geq n_0 \Rightarrow E_n \subset I^{n-n_0} E_{n_0} \qquad (1)$$

Le résultat s'en déduit :

Pour $n = n_0+1$, (1) donne $E_{n_0+1} \subset IE_{n_0}$ donc $E_{n_0+1} = IE_{n_0}$

Pour $n > n_0+1$, (1) donne $E_n \subset I^{n-n_0} E_{n_0} \subset I(\underbrace{I^{n-n_0-1} E_{n_0}}_{\subset E_{n-1} \text{ par hyp.}})$

Donc $E_n \subset IE_{n-1}$

CQFD

<u>exemple</u> : $\{I^nE\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une bonne filtration de E. C'est la <u>filtration triviale de E</u> :

$$\begin{cases} E \supset IE \supset I^2E \supset \ldots \supset I^nE \supset I^{n+1}E \supset \ldots \\ \text{et} \quad I.\,I^nE = I^{n+1}E \quad \forall n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Cette filtration triviale induit sur n'importe quel sous-module F de E la filtration $\{I^nE\cap F\}_n$, et on a :

3.3 <u>Théorème d'Artin-Riesz</u>

A = anneau noethérien

I = idéal de A

E = A-module de type fini

F = sous-module de E

La filtration $\{I^nE\cap F\}_n$ de F induite par la filtration triviale $\{I^nE\}_n$ de E est une bonne filtration, donc :

$$I(I^nE\cap F) = I^{n+1}E\cap F \quad \text{si } n \geq n_0$$

---

preuve : $\{I^nE\cap F\}_n$ est une filtration de F. Montrons que c'est une bonne filtration : d'après le lemme 3.2, il faut montrer que $\oplus I^nE\cap F$ est un $\oplus I^n$-module de type fini.

$\oplus I^nE\cap F$ est un sous-$\oplus I^n$-module de $\oplus I^nE$. Si $\oplus I^n$ était un anneau noethérien, $\oplus I^nE$ serait un $\oplus I^n$-module de type fini donc noethérien d'après 2.4 et donc $\oplus I^nE\cap F$ serait de type fini.

$\oplus I^n$ est bien un anneau noethérien : c'est une A-algèbre engendrée par I donc de type fini, donc noethérienne d'après le co. 2.6. Rappelons que l'on a

$$A[i_1,\dots,i_p] \xrightarrow{\varphi} A\oplus IX\oplus I^2X^2\oplus\ldots \longrightarrow 0$$

$$1 \longmapsto 1$$

$$i_j \longmapsto i_jX$$

où $(i_1,\dots,i_p)$ = syst. générateur de I

Donc

$$A\oplus IX\oplus\ldots \simeq A[i_1,\dots,i_p]/_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \quad \text{noethérien.}$$

CQFD

NB : On peut prendre la définition bourbakiste suivante : Une A-algèbre de type fini est un quotient $A[X_1,\dots,X_p]/_R$.

<u>Corollaire 3.4</u> : A = anneau noethérien
E = A-module de type fini
F = sous-module de E

les 2 topologies I-adiques sur F sont équivalentes.

preuve :
Notons $\mathcal{O}_F$ la topologie I-adique sur F et $\mathcal{O}_E$ la topologie induite sur F par la topologie I-adique de E.

$$I^nF \subset I^nE \cap F \quad \text{donc} \quad \mathcal{O}_E \subset \mathcal{O}_F$$

Soit n_0 / $n \geq n_0 \Rightarrow I(I^nE \cap F) = I^{n+1}E \cap F$. On montre facilement que :

$$I^{n_0+p}E \cap F \subset I^p.F \qquad \forall p \geq 0$$

C'est vrai pour $p=0$. D'après 3.3 :

$$I^{n_0+p}E \cap F = I^p.(\underbrace{I^{n_0}E \cap F}_{\subset F}) \subset I^p.F$$

Donc $\mathcal{O}_F \subset \mathcal{O}_E$.

CQFD

<u>Lemme 3.5</u> : A = anneau noethérien
E = A-module de type fini

Alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^nE = \{e \in E \,/\, \exists i \in I \quad (1-i)e = 0\}$$

preuve :
Posons $\tilde{E} = \{e \in E \,/\, \exists i \in I \quad (1-i)e = 0\}$

$e = ie = i^2e = \dots = i^ke = \dots$ donc $\tilde{E} \subset \bigcap I^nE$.

Inversement, soit $F = \bigcap I^nE$ et $f \in F$. La topologie I-adique de F est grossière puisque $IF = F \Rightarrow I^pF = F \quad \forall p \in \mathbb{N}$. Les seuls ouvert de F sont $\emptyset$ et F.

$Af \subset F$, donc Af possède la topologie grossière. Comme $If = I.(Af)$, If est un voisinage de 0 pour la topologie I-adique de Af, donc $If = Af$.

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ unitaire} \\ If = Af \end{array}\right\} \Rightarrow f \in If \Rightarrow f \in \tilde{E}$$

Finalement $F \subset \tilde{E}$.

CQFD

3.6 Théorème de Krull

A = anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{M}$
E = A-module de type fini

Alors : $$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}^n E = \{0\}$$

preuve : On fait $I = \mathfrak{M}$ dans le lemme précédent :

$\tilde{E} = \{e \in E \,/\, (1-m)e = 0 \quad m \in \mathfrak{M}\} = \{0\}$ car $m \in \mathfrak{M} \Rightarrow 1-m$ inversible.

CQFD

<u>Remarque :</u> Si A est un anneau local noethérien, la topologie I-adique de E est séparée.

4. Anneau des fractions :

A = anneau unitaire commutatif
S = partie multiplicative de A (ie $1 \in S$ et $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$)
On considère la relation :

$$(a,s) \,\mathcal{R}\, (a',s') \iff \exists t \in S \quad as't = a'st$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $A \times S$.
On note $S^{-1}A = A \times S / \mathcal{R}$ et $\frac{a}{s}$ la classe d'équivalence de $(a,s) \in A \times S$.

Les lois internes $(a,s).(a',s') = (aa', ss')$
$(a,s) + (a',s') = (s'a + sa', ss')$ sont compatibles avec $\mathcal{R}$,
donc définissent 2 lois quotients :

$$\begin{cases} \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'} \\ \frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + sa'}{ss'} \end{cases} \quad \text{dans } S^{-1}A.$$

On vérifie que ces lois munissent $S^{-1}A$ d'une structure d'anneau unitaire commutatif.

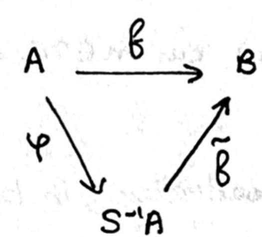
<u>Définition 4.1</u> : $S^{-1}A$ est appelé l'<u>anneau des fractions</u> de A défini par S.

L'application $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$, $a \longmapsto \frac{a}{1}$ est un morphisme d'anneau (non injectif en général !), et chaque élément de $\varphi(S)$ est inversible dans $S^{-1}A$ ($\frac{s}{1}$ d'inverse $\frac{1}{s}$). $\mathrm{Ker}\,\varphi$ = <u>éléments de S-torsion de A</u>

Un S-morphisme de l'anneau A vers l'anneau B est un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ tel que $f(S)$ soit inclus dans l'ensemble des éléments inversibles de B (ie $f(S) \subset B^*$). On a vu que $\varphi : A \to S^{-1}A$ est un S-morphisme.

Proposition 4.2 : $(S^{-1}A, \varphi)$ est la solution du problème universel suivant :

"Pour tout anneau B et tout S-morphisme $f : A \to B$, il existe un et un seul morphisme $\tilde{f} : S^{-1}A \to B$ tel que le diagramme :



soit commutatif."

De plus, le couple $(S^{-1}A, \varphi)$, où $S^{-1}A$ est un anneau et φ un S-morphisme, vérifiant la propriété ci-dessus est unique à isomorphisme d'anneaux près.

preuve : Posons $\tilde{f}\left(\frac{a}{s}\right) = f(a) f(s)^{-1}$ où $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$. $\tilde{f}$ est bien définie car $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \Rightarrow \exists t \in S \quad as't = a'st \Rightarrow (f(a)f(s') - f(s)f(a'))f(t) = 0$ d'où $f(a)f(s)^{-1} = f(a')f(s')^{-1}$ car $f(t)$, $f(s)$ et $f(s')$ sont inversibles.
On a $\tilde{f} \circ \varphi = f$ et $\tilde{f}$ est un morphisme d'anneaux. $\tilde{f}$ est unique tel que $\tilde{f} \circ \varphi = f$, puisque nécessairement $\tilde{f}\left(\frac{a}{1}\right) = f(a)$ si $a \in A$ et si $s \in S$,
$\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1 \Rightarrow f(s) \cdot \tilde{f}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 \Rightarrow \tilde{f}\left(\frac{1}{s}\right) = f(s)^{-1}$.
Soit (X, φ_X) un autre couple vérifiant la prop. universelle ci-dessus.
Il existe un et un seul morphisme $\tilde{\varphi}$ tel que le diag :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & S^{-1}A \\ {\scriptstyle \varphi_X}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle \tilde{\varphi}} & \\ X & & \end{array}$$

soit commutatif.

D'autre part, il existe 1 et 1 seul morphisme $\tilde{\varphi}_X$ rendant le diag. suiv. commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_X} & X \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle \tilde{\varphi}_X} & \\ S^{-1}A & & \end{array}$$

Alors $\tilde{\varphi}_X \circ \tilde{\varphi}$ est un morphisme rendant le diag :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_X} & X \\ {\scriptstyle \varphi_X}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle \tilde{\varphi}_X \circ \tilde{\varphi}} & \\ X & & \end{array}$$

comm.

et l'unicité permet de conclure :

$$\tilde{\varphi}_X \circ \tilde{\varphi} = id_X$$

De même, $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}_X = id_{S^{-1}A}$, donc $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme de X vers $S^{-1}A$

CQFD

Remarques :

1) Si A est intègre, et si $0 \notin S$ alors $\varphi : A \to S^{-1}A$ est injective. En effet $a \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Leftrightarrow \frac{a}{1} = 0 \Leftrightarrow \exists t \in S \;\; at = 0 \Rightarrow a = 0$ (car $t \neq 0$)

2) Si A est intègre et si $S = A \setminus \{0\}$ alors $S^{-1}A$ est un corps appelé le corps des fractions de l'anneau A. On immerge A dans $S^{-1}A$ grâce à φ.

3) Si $S = \{ f^n \,/\, n \in \mathbb{N}^* \}$ on note $S^{-1}A = A_f$. Par exemple $\mathbb{Z}_{10}$ est l'anneau des nombres rationnels décimaux.

4) Si $S = A \setminus P$ où P est un idéal premier de A, on notera $S^{-1}A = A_P$.

Proposition 4.3 : Il existe une bijection croissante entre les idéaux premiers de A disjoints de S et les idéaux premiers de $S^{-1}A$.

preuve :

Notons $\mathcal{I}(A)$ (resp. $\mathcal{I}(S^{-1}A)$) l'ensemble des idéaux premiers de A disjoints de S (resp. des idéaux premiers de $S^{-1}A$). On pose :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{I}(A) &\longrightarrow \mathcal{I}(S^{-1}A) \\ I &\longmapsto S^{-1}I \doteq \text{idéal engendré par } \varphi(I) = \frac{I}{1}. \end{aligned}$$

* ψ surjective : Si $J \in \mathcal{I}(S^{-1}A)$, soit I l'idéal des numérateurs de J, ie :

$$I = \{ a \in A \,/\, \exists s \in S \quad \frac{a}{s} \in J \}$$

C'est un idéal, car si $a, a' \in A$, $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'} \in J$ donc $\frac{aa'}{ss'} \in J \Rightarrow aa' \in I$, et d'autre part $\frac{a'}{s} = \frac{a'}{s'} \cdot \frac{s'}{s} \in J$ donc $\frac{a'}{s} + \frac{a}{s} \in J \Rightarrow a + a' \in I$.

Alors :

1) $S^{-1}I = J$

$J \subset S^{-1}I$ car si $j \in J$ $\;j = \frac{i}{s}$ et $i \in I$ donc $\frac{i}{s} = \frac{i}{1} \cdot \frac{1}{s} \in S^{-1}I$

$S^{-1}I \subset J$ car si $i \in I$ et $s \in S$, il existe $t \in S$ tel que $\frac{i}{t} \in J$, donc $\frac{i}{s} = \frac{t}{s} \cdot \frac{i}{t} \in J$

2) $I \cap S = \emptyset$: Sinon $i \in I \cap S \Rightarrow 1 = \frac{i}{i} \in S^{-1}I \Rightarrow S^{-1}I = S^{-1}A$, ce qui est absurde car $S^{-1}I = J$ est un idéal premier.

3) I premier :

Si $a.b \in I \quad \exists s \in S \quad \frac{ab}{s} \in J \Rightarrow \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{1} \in J \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{s} \in J \\ \text{ou} \\ \frac{b}{1} \in J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in I \\ \text{ou} \\ b \in I \end{cases}$

* ψ bien définie : I premier disjoint de $S \Rightarrow S^{-1}I$ premier.

$\forall \frac{a}{s}, \frac{a'}{s'} \in S^{-1}A \,/\, \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} \in S^{-1}I$ notons $\alpha = aa'$ et $\sigma = ss'$, de sorte que $aa'\sigma = \alpha ss' \in I$. Comme $I \cap S = \emptyset \Rightarrow \sigma \notin I$, et I premier, on obtient,

$$aa' \in I \Rightarrow \begin{cases} a \in I \\ \text{ou} \\ a' \in I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{s} \in S^{-1}I \\ \text{ou} \\ \frac{a'}{s'} \in S^{-1}I \end{cases}.$$

* Ψ *injective* : $S^{-1}I = S^{-1}J \Rightarrow I = J$?

Il suffit de vérifier que $I \subset J$.

$\forall a \in I \quad \frac{a}{s} \in S^{-1}I = S^{-1}J \Rightarrow \frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ où $a' \in J$

Donc $as' = a's \in J$ et $s' \notin J$ car $J \cap S = \emptyset$, donc, comme J premier, $a \in J$. Finalement $I \subset J$.

* Ψ *croissante* : trivial.

CQFD

Soient A un anneau com. unitaire et S une partie multiplicative de A.
Si M est un A-module, on définit le <u>module des fractions</u> de M défini par S, comme suit :

On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans $M \times S$:

$(m, s) \; \mathcal{R} \; (m', s') \iff \exists t \in S \quad ms't = m'st$

et les lois :

$$\begin{cases} (m,s) + (m',s') = (ms' + m's, ss') \\ (a,s) . (m, \sigma) = (am, s\sigma) \qquad (a,s) \in A \times S \quad (m, \sigma) \in M \times S \end{cases}$$

On note $\frac{m}{s}$ la classe d'équivalence de (m,s) pour $\mathcal{R}$. Ces 2 lois sont compatibles pour $\mathcal{R}$: vérifions le pour la multiplication externe :

$(a,s) \mathcal{R} (a',s') \iff \exists t \in S \quad as't = sa't$

$(m, \sigma) \mathcal{R} (m', \sigma') \iff \exists p \in S \quad m\sigma' p = \sigma m' p$

d'où $\quad am s' \sigma' (tp) = s\sigma a' m' (tp) \Rightarrow (am, s\sigma) \mathcal{R} (a'm', s'\sigma')$

Ainsi $S^{-1}M \doteq M \times S / \mathcal{R}$ est structuré en $S^{-1}A$-module pour les lois quotients :

$$\begin{cases} \frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{ms' + sm'}{ss'} \\ \frac{a}{s} . \frac{m}{\sigma} = \frac{am}{s\sigma} \end{cases}$$

Notons $\Psi : M \longrightarrow S^{-1}M$.

$m \longmapsto \frac{m}{1}$

L'application $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$ permet aussi de structurer $S^{-1}M$ en A-module.

$a \longmapsto \frac{a}{1}$

Ainsi :

$$\begin{cases} M = A\text{-module} \\ S^{-1}M = S^{-1}A\text{-module} \end{cases}$$

<u>Proposition 4.4</u> : $(S^{-1}M, \Psi)$ est la solution du problème universel :
" Pour tout $S^{-1}A$-module N, tout morphisme de A-modules $f : M \to N$ se factorise de manière unique à travers $S^{-1}M$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \Psi \searrow \quad \nearrow \tilde{f} = S^{-1}A\text{-linéaire} & \\ & S^{-1}M & \end{array}$$ "

De plus, le couple $(S^{-1}M, \Psi)$, où $S^{-1}M$ est un $S^{-1}A$-module et $\Psi : M \to S^{-1}M$ A-linéaire, est unique s'il vérifie la propriété ci-dessus".

preuve :
Si $\tilde{f}$ existe, on a $\tilde{f}\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{1}{s} f(m)$. Cette formule définit une application $\tilde{f}$ $S^{-1}A$-linéaire puisque :

$$\tilde{f}\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{\sigma}\right) = \frac{1}{s\sigma} f(am) = \frac{a}{s\sigma} f(m) = \frac{a}{\sigma} \cdot \tilde{f}\left(\frac{m}{\sigma}\right)$$

et $\tilde{f} \circ \Psi = f$.
L'unicité se montre comme en 4.2.

CQFD

4.5 <u>Autre façon de définir $S^{-1}M$</u> :

<u>Rappel</u> : Si B et M sont 2 A-modules (et B anneau (En fait B = A-algèbre)), $B \otimes_A M$ est un B-module pour la loi $\lambda(b \otimes m) = (\lambda b) \otimes m$.

Soit $f : M \longrightarrow S^{-1}A \otimes_A M$, $m \longmapsto 1 \otimes m$. f est A-linéaire, et $S^{-1}A \otimes_A M$ est structuré en $S^{-1}A$-module. La propriété universelle 4.4 montre l'existence d'une unique application $S^{-1}A$-linéaire $\tilde{f}$ rendant le diagramme suiv. com. :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & S^{-1}A \otimes_A M \\ & \Psi \searrow \quad \nearrow \tilde{f} & \\ & S^{-1}M & \end{array}$$

d'ailleurs $\tilde{f}\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{1}{s} \otimes m$

En fait, $\tilde{f}$ <u>est un $S^{-1}A$-isomorphisme de $S^{-1}A$-modules</u> : l'application
$\tilde{g} : S^{-1}A \otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M$, $\frac{a}{s} \otimes m \longmapsto \frac{am}{s}$ est bien définie et A-linéaire puisque
l'application $g : S^{-1}A \times M \longrightarrow S^{-1}M$, $\left(\frac{a}{s}, m\right) \longmapsto \frac{am}{s}$ est A-bilinéaire. En fait, $\tilde{g}$ est $S^{-1}A$-linéaire car :

$$\tilde{g}\left(\frac{b}{\sigma}\left(\frac{a}{s} \otimes m\right)\right) = \tilde{g}\left(\frac{ba}{\sigma s} \otimes m\right) = \frac{bam}{\sigma s} = \frac{b}{\sigma}\, \tilde{g}\left(\frac{a}{s} \otimes m\right)$$

et l'on constate que $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id_{S^{-1}M}$ et $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{S^{-1}A \otimes_A M}$.

Proposition 4.6 : Avec les notations précédentes, l'application $\tilde{\beta} : S^{-1}M \to S^{-1}A \otimes_A M$ est un isomorphisme de $S^{-1}A$-modules,
$$\frac{m}{s} \longmapsto \frac{1}{s} \otimes m$$
et l'application réciproque est $\tilde{g} : S^{-1}A \otimes_A M \longrightarrow S^{-1}M$
$$\frac{a}{s} \otimes m \longmapsto \frac{am}{s}$$

$$\boxed{S^{-1}M \simeq S^{-1}A \otimes_A M}$$

où $S^{-1}A \otimes_A M$ est canoniquement structuré en $S^{-1}A$-module.

Soit P un idéal premier de A. $S = A \setminus P$ est alors une partie multiplicative de A. On note dans ce cas :
$$A_P = S^{-1}A$$
Comme dans la proposition 4.3, $S^{-1}P = P.A_P$ désigne l'idéal de A_P engendré par $\varphi(P) = \frac{P}{1}$.

Proposition 4.7 : A_P est un anneau local d'idéal maximal $S^{-1}P = P.A_P$ et dont le corps résiduel $A_P/_{P.A_P}$ est isomorphe au corps des fractions de $A/_P$.

preuve :
1) <u>A_P est un anneau local</u> : La proposition 4.3 montre que si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de A_P, on peut lui associer un idéal premier I de A disjoint de $S = A \setminus P$, donc $I \subset P$. Mais alors $\mathfrak{M} \subset S^{-1}P$ puisque la bijection 4.3 est croissante, et $S^{-1}P$ est un idéal de A_P donc $\mathfrak{M} = S^{-1}P = PA_P$.
2) <u>$A_P/_{S^{-1}P} \simeq$ corps des fractions de $A/_P$</u>

$$\mathcal{F}(A/_P) = \text{corps des fractions de } A/_P = \{(\dot{x}, \dot{y}) \,/\, \dot{y} \neq \dot{0}\}/_{\mathcal{R}}$$

$$A_P/_{S^{-1}P} = \frac{\{(x,y),\ y \notin P\}/_{\mathcal{R}}}{\{\frac{x}{y} \in A_P \,/\, x \in P\}}$$

On vérifie que l'application $f : A_P/_{S^{-1}P} \longrightarrow \mathcal{F}(A/_P)$ est
$$\dot{\left(\frac{x}{y}\right)} \longmapsto \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$$
un isomorphisme de corps.
* f est bien définie
* f est surjective.
* f est un morphisme de corps.
* f est injective : $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \dot{0} \iff \dot{x} = \dot{0} \iff x \in P \Rightarrow \dot{\left(\frac{x}{y}\right)} = \dot{0}$.

CQFD

<u>Remarque</u> : S^{-1} est un foncteur exact de la catégorie des A-modules dans la catégorie des $S^{-1}A$-modules.

Soit P un idéal premier de A et $S = A \setminus P$. <u>On note</u> :

$$\begin{cases} A_P = S^{-1}A \\ M_P = S^{-1}M = S^{-1}A \otimes_A M \\ \bar{M}_P = M_P / PM_P \quad \text{et} \quad \bar{A}_P = A_P / PA_P \end{cases}$$

On a $\boxed{\bar{M}_P = A_P/PA_P \otimes_{S^{-1}A} M_P}$.

En effet, $PA_P \overset{i}{\hookrightarrow} A_P \longrightarrow A_P/PA_P \longrightarrow 0$ est une suite exacte de $S^{-1}A$-modules, et le foncteur $\otimes$ est exact à droite donc :

$$PA_P \otimes_{S^{-1}A} M_P \xrightarrow{i_*} \underbrace{A_P \otimes_{S^{-1}A} M_P}_{\simeq M_P} \longrightarrow A_P/PA_P \otimes_{S^{-1}A} M_P \longrightarrow 0$$

est exacte. $\operatorname{Im} i_* = PM_P$, d'où le résultat.

<u>Proposition 4.8</u> :

A = anneau M = A-module de type fini

P = idéal premier de A $\operatorname{Ann} M = \{a \in A \,/\, aM = 0\}$

Alors :

$$\boxed{\operatorname{Ann} M \not\subset P \iff M_P = 0 \iff \bar{M}_P = 0}$$

preuve :

1) $M_P = 0 \Rightarrow \bar{M}_P = 0$ (trivial)

2) Le <u>lemme de Nakayama</u> montre que $\bar{M}_P = 0 \Rightarrow M_P = 0$. En effet :

$M_P/P.M_P = 0 \iff M_P = PM_P = PA_P . M_P$

où $\begin{cases} PA_P \text{ est l'idéal maximal de l'anneau local } S^{-1}A \\ M_P \text{ est un } S^{-1}A\text{-module de type fini} \end{cases}$

donc $M_P = 0$.

3) Si $a \in (\operatorname{Ann} M) \setminus P$ $\quad M_P = 1.M_P = \frac{a}{a}(S^{-1}A \otimes_A M) = \frac{1}{a}(a\,S^{-1}A \otimes_A M)$

$= \frac{1}{a}(S^{-1}A \otimes_A aM) = 0$ car $aM = 0$.

4) $M_P = 0 \iff S^{-1}A \otimes_A M = 0$

Soit $m_1, \dots, m_p$ un système de générateurs de M. On a $1 \otimes_A m_i = 0$ donc $\exists t_i \notin P \quad t_i m_i = 0$ (d'après l'identification 4.6, $1 \otimes_A m_i = 0 \iff \frac{m_i}{1} = 0$ dans $S^{-1}M$)

Alors $(t_1 \dots t_p) M = 0$ et $t_1 \dots t_p \notin P$ (sinon P premier $\Rightarrow \exists i \; t_i \in P$)

Finalement $t_1 \dots t_p \in (\operatorname{Ann} M) \setminus P$.

CQFD

5. Éléments nilpotents :

Un élément x d'un anneau unitaire A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Un anneau réduit est un anneau qui ne possède pas d'éléments nilpotents non nuls.
L'ensemble $\mathcal{N}$ des éléments nilpotents de A s'appelle le nilradical de A. $\mathcal{N}$ est un idéal de A.

Soit $\{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}$ la famille des idéaux premiers de A.

$$x \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad x^n = 0 \in \mathcal{P}_i \Rightarrow x \in \mathcal{P}_i \quad \forall i \in I \Rightarrow \mathcal{N} \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$$

En fait, nous avons :

Proposition 5.1 : On a $\boxed{\mathcal{N} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i}$

preuve : Tout revient à montrer que si $t \notin \mathcal{N}$ il existe un idéal premier $\mathcal{P}$ qui ne contient pas t.
$S = \{1, t, t^2, \dots, t^k, \dots\}$ est une partie multiplicative de A. L'ensemble des idéaux de A disjoints de S est un ensemble ordonné inductif non vide (il contient 0). Le théorème de Zorn montre qu'il existe un élément maximal $\mathcal{P}$ de cet ensemble. Montrons que $\mathcal{P}$ est premier : si $u \notin \mathcal{P}$ et $v \notin \mathcal{P}$, comme $\mathcal{P}$ est un élément maximal :

$$\mathcal{P} + Au \cap S \neq \emptyset$$
$$\text{et } \mathcal{P} + Av \cap S \neq \emptyset$$

Donc $\mathcal{P} + Auv \cap S \neq \emptyset$ car S est multiplicatif, donc $uv \notin \mathcal{P}$
CQFD

Corollaire 5.2 : Si I est un idéal de A, on a :

$$\boxed{\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathcal{P}_i \supset I \\ \mathcal{P}_i \text{ premier}}} \mathcal{P}_i}$$

preuve : Les idéaux de A/I sont en bijection avec les idéaux de A contenant I, et la bijection croissante est la suivante :
Notons $\mathcal{I}(A)$ (resp. $\mathcal{I}(A/I)$) l'ensemble des idéaux de A contenant I (resp. des idéaux de A/I).

$$\mathcal{I}(A) \xrightarrow{\ F\ } \mathcal{I}(A/I)$$
$$J \longmapsto J/I = \{\dot{x} \in A/I \ / \ x \in J\}$$
$$L = \{k + I \ / \ \dot{k} \in J\} \longleftarrow J$$

Dans cette correspondance, $a \in \sqrt{I} \iff \dot{a} \in \mathcal{N}(A/I) \doteq$ nilradical de A/I donc :

$$\xi(\sqrt{I}) = \mathcal{N}(A/I) \qquad (1)$$

et :

$$I \in \mathcal{I}(A) \text{ premier} \iff \xi(I) \in \mathcal{I}(A/I) \text{ premier} \qquad (2)$$

Vérifions (2) : Si $J \in \mathcal{I}(A/I)$ est premier, $xy \in L = \{k + I / \dot{k} \in J\}$ donne $\dot{x}.\dot{y} \in J \Rightarrow \dot{x} \in J$ ou $\dot{y} \in J \Rightarrow x \in L$ ou $y \in L$
Inversement, si $J \in \mathcal{I}(A)$ est premier, $\dot{x}.\dot{y} \in J/I \iff x.y \in J \Rightarrow x \in J$ ou $y \in J \Rightarrow \dot{x} \in J/I$ ou $\dot{y} \in J/I$.

Le corollaire provient alors directement de 5.1, puisque :

$$\mathcal{N}(A/I) = \bigcap_{\substack{P_i \supset I \\ P_i \text{ premier}}} \xi(P_i) \Rightarrow \sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P_i \supset I \\ P_i \text{ premier}}} P_i$$

(en appliquant ξ^{-1} compatible avec l'intersection).
CQFD

Proposition 5.3 : A anneau
$M = A$-module de type fini
$B = A$- algèbre
On note $I = \operatorname{Ann} M$ et $J = \operatorname{Ann} N$ où $N \doteq B \otimes_A M$ est structuré canoniquement en B-module
Alors :

$$\boxed{IB \subset J \subset \sqrt{IB}}$$

preuve :

* $IB \subset J$ est trivial, car $\forall a \in I \quad ab(b' \otimes_A m) = (abb' \otimes_A m) = bb' \otimes_A am = 0$ (car $am = 0$)
* Montrons que :

(1) $\left.\begin{matrix} Q \text{ premier} \\ IB \subset Q \end{matrix}\right\} \Rightarrow J \subset Q$ de sorte que $J \subset \sqrt{IB}$ d'après la pro. 5.2.

Soit $P = \{a \in A / a.1_B \in Q\}$.
P est premier, et si l'on montre

(2) $\qquad I \subset P \Rightarrow J \subset Q$

Alors, comme $IB \subset Q$, on aura $I \subset P$ donc $J \subset Q$, et (1) sera montré.
Tout revient à montrer (2).

La prop. 4.8 donne : $I \subset P \iff \overline{M}_P \neq 0$

$\Downarrow (3)$?

et : $J \subset Q \iff \overline{N}_Q \neq 0$

Tout revient à montrer (3).

On a le diag. commutatif :

$$\begin{array}{ccc} 1_A & \longmapsto & 1_B \\ A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(A/P) \simeq \overline{A}_P & \longrightarrow & \overline{B}_Q \simeq \mathcal{F}(B/Q) \\ \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \text{ (où } \dot{y} \neq 0) & \longmapsto & \frac{\dot{x.1}}{\dot{y.1}} \end{array}$$

($\mathcal{F}(\ )$ = corps des fractions de ( )) l'isomorphisme $\mathcal{F}(A/P) \simeq \overline{A}_P$ est donné en 4.7)

Ce diagramme permet de structurer $\overline{B}_Q$ ent $\overline{A}_P$-module.

Supposons $\overline{M}_P \neq 0$,

On a : (4) $\overline{N}_Q = \overline{B}_Q \otimes_B N$

En effet : $\overline{N}_Q \underset{\text{(déf p16)}}{=} \overline{B}_Q \otimes_{B_Q} N_Q = \overline{B}_Q \otimes_{B_Q} (B_Q \otimes_B N) = \overline{B}_Q \otimes N$

Alors :

$$\overline{N}_Q = \overline{B}_Q \otimes_B N = \overline{B}_Q \otimes_B (B \otimes_A M) = \overline{B}_Q \otimes_A M$$
$$= (\overline{B}_Q \otimes_{\overline{A}_P} \overline{A}_P) \otimes_A M = \overline{B}_Q \otimes_{\overline{A}_P} (\overline{A}_P \otimes_A M)$$
$$= \overline{B}_Q \otimes_{\overline{A}_P} \overline{M}_P$$

Or $\overline{M}_P \neq 0$ et $\overline{M}_P$ est un espace vectoriel sur le corps résiduel $\overline{A}_P$, donc $\overline{M}_P = \bigoplus_1^N \overline{B}_Q$ et :

$$\overline{N}_Q = \overline{B}_Q \otimes_{\overline{A}_P} \left(\bigoplus_1^N \overline{A}_P\right) = \bigoplus_1^N \overline{B}_Q$$

Enfin $\overline{B}_Q \neq 0$ (car l'idéal maximal $Q.B_Q$ n'est pas tout B_Q), donc $\overline{N}_Q \neq 0$, ce qui prouve (3).

CQFD

<u>lemme 5.4</u> : Tout idéal premier de A contient un idéal premier minimal. Ainsi, le nilradical de A s'écrit il comme l'intersection des idéaux premiers minimaux.

preuve : Soit P un idéal premier. L'ensemble des idéaux premiers inclus dans P forment un ensemble ordonné inductif pour l'ordre inverse de $\subset$: en effet, si $\{P_i\}_{i\in I}$ est une partie totalement ordonnée de cet ensemble, $\bigcap P_i$ est un idéal premier puisque

$$\lambda\mu \in \bigcap P_i \Rightarrow \lambda\mu \in P_i \quad \forall i \in I$$

Si $\mu \notin \bigcap \mathcal{P}_i$ il existe $i \in I$ / $\mu \notin \mathcal{P}_i$ donc $\lambda \in \mathcal{P}_i$.

$$\left.\begin{array}{ll} \forall \mathcal{P}_j \supset \mathcal{P}_i & \lambda \in \mathcal{P}_i \Rightarrow \lambda \in \mathcal{P}_j \\ \forall \mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_i & \mu \notin \mathcal{P}_i \Rightarrow \lambda \in \mathcal{P}_j \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$$

Finalement, le théorème de Zorn montre l'existence d'un élément minimal.

CQFD

<u>Proposition 5.5</u> :

> A anneau noethérien
> $\mathcal{N}$ = nilradical de A
> (1) Il existe $r \in \mathbb{N}$ / $\mathcal{N}^r = 0$
> (2) Si I est un idéal de A, notons $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des idéaux premiers de A contenant I. Alors l'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{P}(I)$ est fini.

NB : Pour $I = \{0\}$, (2) implique que le nilradical $\mathcal{N}$ peut toujours s'écrire comme l'intersection finie des idéaux premiers minimaux.

preuve :

(1) facile : Si $n_1, \dots, n_p$ est un système de générateurs de $\mathcal{N}$, il existe $r_i \in \mathbb{N}$ tels que $n_i^{r_i} = 0$, d'où $\mathcal{N}^r = 0$ si $r = \sum_{i=1}^{p} r_i$

(2) <u>Principe de la récurrence noethérienne</u> :

" Soient E un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admette un élément maximal, et $F \subset E$. Alors $F = E \Leftrightarrow$ (N) vrai, où :

$$(N) \quad \forall e \in E \quad \{ \forall x \in E \quad x > e \Rightarrow x \in F \} \Rightarrow e \in F$$

En effet, si $F \neq E$ on note e un élément maximal de $E \setminus F$. (N) implique que $e \in F$, ce qui est absurde.

Pour montrer (2), on pose :

E = ensemble des idéaux de A ordonnés par l'inclusion.

Toute partie non vide de E admet un élément maximal puisque A est noethérien.

$\forall I \in E$ notons $\mathcal{P}'(I)$ l'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{P}(I)$, et posons :

$F = \{ I \in E \ / \ \mathcal{P}'(I) \text{ fini} \}$

Alors $F = E$ puisque F vérifie (N) :

$P \in \mathcal{P}(I)$ minimal

I

Pour $I \in E$ fixé, de 2 choses l'une :

* Ou bien I premier, alors $\# \mathcal{P}'(I) = 1 \Rightarrow I \in F$ (1)
* Ou bien I n'est pas premier, alors on choisit $xy \in I$ avec $x \notin I$ et $y \notin I$. Si $P \in \mathcal{P}(I)$, $P \supset I$ donc $xy \in P \Rightarrow x \in P$ ou $y \in P$

$$\Rightarrow I + Ax \subset P \text{ ou } I + Ay \subset P$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}'(I) \subset \mathcal{P}'(I+Ax) \cup \mathcal{P}'(I+Ay) \qquad (2)$$

et (N) se voit directement :

Si $\forall J \in E \quad J \supsetneq I \underset{(3)}{\Rightarrow} J \in F$, on a :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } I \text{ premier} \quad I \in F \text{ d'après (1)} \\ \\ \text{sinon, } I + Ax \in F \text{ et } I + Ay \in F \text{ d'après (3), et (2)} \\ \text{donne } \mathcal{P}'(I) \subset \mathcal{P}'(I+Ax) \cup \mathcal{P}'(I+Ay) \Rightarrow I \in F. \end{array} \right.$

CQFD

Chapitre 3 — **Les faisceaux**

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\underline{F}} & \underline{F}(U) \\ \cap\downarrow & & \uparrow \rho_{UV} \\ V & \xrightarrow{\underline{F}} & \underline{F}(V) \end{array}$$

1. Préfaisceau et faisceau

Définition 1.1 : Soit X un espace topologique. Un préfaisceau d'ensembles (resp. de groupes, d'anneaux, etc...) sur X est un foncteur contravariant de la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et les flèches sont les inclusions évidentes dans la catégorie des ensembles (resp. des groupes, des anneaux, etc...)

Ainsi, un préfaisceau de groupes sur X est la donnée pour tout ouvert U de X d'un groupe $\underline{F}(U)$, et pour tout couple $U \subset V$ d'ouverts de X d'un homomorphisme de groupes $\rho_{UV} : \underline{F}(V) \to \underline{F}(U)$ appelé "restriction", qui satisfait $\rho_{UU} = id_{\underline{F}(U)}$ et $U \subset V \subset W \Rightarrow \rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$.

On note souvent $\rho_{UV}(s) = s|_U$ si $s \in \underline{F}(V)$

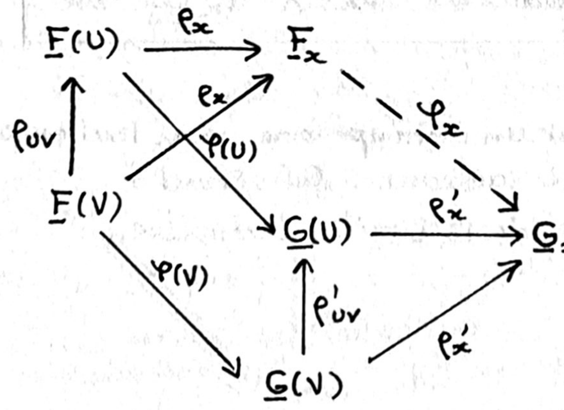
Définition 1.2 : Un morphisme de préfaisceaux entre 2 préfaisceaux $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sur le même espace topologique X est un morphisme de foncteurs, ie une collection $\lambda = \{\lambda(U)\}$ de morphismes $\lambda(U) : \underline{F}(U) \to \underline{G}(U)$ qui commutent avec les restrictions :

$$\begin{array}{ccc} \underline{F}(U) & \xrightarrow{\lambda(U)} & \underline{G}(U) \\ \rho_{UV}\uparrow & & \uparrow \rho'_{UV} \\ \underline{F}(V) & \xrightarrow{\lambda(V)} & \underline{G}(V) \end{array}$$

$\lambda(U) \circ \rho_{UV} = \rho'_{UV} \circ \lambda(V)$ si $U \subset V$.

On définit la fibre de $\underline{F}$ en $x \in X$ par : $\boxed{\underline{F}_x = \varinjlim_{x \in U \subset X} \underline{F}(U)}$, et on suppose connue, à ce sujet, les définitions équivalentes de la limite inductive d'un système ordonné inductif.

Si $\varphi : \underline{F} \to \underline{G}$ est un morphisme de préfaisceaux sur X, on définit l'application $\varphi_x : \underline{F}_x \to \underline{G}_x$ par passage à la limite inductive :



L'existence de φ_x est immédiate si l'on applique la propriété universelle de la limite inductive : le système d'applications $\{\rho'_x \circ \varphi(U)\}_{U \subset X}$ commute avec les restrictions ρ_{UV} donc se factorise à travers la limite inductive $\underline{F}_x$.
L'existence de φ_x est vraiment une propriété de la limite inductive :

Rappel : Le foncteur $\varinjlim$ est un foncteur de la catégorie dont les objets sont les systèmes inductifs d'ensemble (resp. groupes, etc...) indexés par I, disons $\{(M_i, f_{ji})\}_{i\in I}$, où I est un ensemble ordonné d'indices filtrant à droite, et dont les flèches sont les morphismes $g = (g_i)_{i\in I}$, $g_i : M_i \to N_i$, tels que les diagrammes :

$$g : \{(M_i, f_{ji})\} \to \{(N_i, f'_{ji})\} \qquad \begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{f_{ji}} & M_j \\ {\scriptstyle g_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_j} \\ N_i & \xrightarrow[f'_{ji}]{} & N_j \end{array}$$

soient commutatifs, dans la catégorie des ensembles (resp. groupes, etc...).

Le foncteur $\varinjlim$ est un foncteur exact. (cf R1)

Définition 1.3 :

Un faisceau $\underline{F}$ sur l'espace topologique X est un préfaisceau sur X qui vérifie : Pour tout les ouverts U, U_i de X tels que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$,

(F1) (Axiome de recollement des sections)

$\forall f_i \in \underline{F}(U_i) \quad \forall i,j \in I \quad f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j} \Rightarrow \exists f \in \underline{F}(U) \quad f|_{U_i} = f_i \quad \forall i$

(F2) (Axiome d'unicité du recollement)

$\forall f, g \in \underline{F}(U) \quad \forall i \in I \quad f|_{U_i} = g|_{U_i} \Rightarrow f = g$

Un préfaisceau qui vérifie (F1) et (F2) s'appelle aussi un préfaisceau complet.

Définition 1.4 : Un morphisme de faisceaux est un morphisme de préfaisceaux entre les préfaisceaux sous-jacents.

On note $\mathrm{Hom}(\underline{F}, \underline{G})$ l'ensemble des morphismes de faisceaux de $\underline{F}$ dans $\underline{G}$. $f \in \mathrm{Hom}(\underline{F}, \underline{G})$ s'appelle un isomorphisme de faisceaux s'il existe $g \in \mathrm{Hom}(\underline{G}, \underline{F})$ tel que $g\circ f = id_{\underline{F}}$ et $f\circ g = id_{\underline{G}}$.

Proposition 1.5 : Soit $\varphi : \underline{F} \to \underline{G}$ un morphisme de faisceaux. Alors :

φ isomorphisme de faisceaux $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ φ_x bijective.	(*)

preuve : $\varphi(U) : \underline{F}(U) \to \underline{G}(U)$ est un isomorphisme pour tout ouvert U de X ssi φ est un isomorphisme de faisceaux. Cela étant :

($\Rightarrow$) trivial. C'est la fonctorialité de la limite inductive.

(*) voir rappel p 37 verso et § 3.1 p 23

($\Leftarrow$) * $\varphi(U) : \underline{F}(U) \longrightarrow \underline{G}(U)$ est injective :

$\varphi(U)f = \varphi(U)g \Rightarrow \varphi_x(f_x) = \varphi_x(g_x)$ $\forall x \in U$, par passage à la limite inductive,
$\Rightarrow f_x = g_x$ puisque φ_x est injective,
$\Rightarrow \exists W$ vois. de x $f|_W = g|_W$ par déf. de la lim. ind.

f et g sont 2 sections sur U qui coïncident sur chaque ouvert W d'un recouvrement de U. L'axiome d'unicité du recollement donne bien $f = g$ sur U.

* $\varphi(U) : \underline{F}(U) \longrightarrow \underline{G}(U)$ est surjective :

$\forall g \in \underline{G}(U)$ $\exists f_x / \varphi_x(f_x) = g_x$
Donc il existe un voisinage W_x de x dans U tel que $\varphi(W_x)(f,_{W_x}) = g,_{W_x}$ où $f,_{W_x}$ désigne un représentant de la classe $f_x \in \underline{F}_x$ défini sur W_x (ie $f,_{W_x} \in \underline{F}(W_x)$ et $\rho_x(f,_{W_x}) = f_x$)
On a, pour tout W_y voisinage de y du type précédent, $f,_{W_x}|_{W_x \cap W_y} = f,_{W_y}|_{W_x \cap W_y}$ puisque $\varphi(W_x \cap W_y)(f,_{W_x}|_{W_x \cap W_y}) = \varphi(W_x \cap W_y)(f,_{W_y}|_{W_x \cap W_y})$ et puisque $\varphi(W_x \cap W_y)$ est injective d'après le stade ci-dessus.
On peut donc recoller les sections $f,_{W_x} \in \underline{F}(W_x)$ pour obtenir une section globale $f \in \underline{F}(U)$ vérifiant $\varphi(U)(f) = g$ grâce à l'unicité du recollement dans $\underline{G}(U)$.

* $\varphi(U)^{-1}$ est-il un morphisme de préfaisceau ?

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \underline{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{VU}} & \underline{F}(V) \\ \varphi(U)\downarrow & & \downarrow\varphi(V) \\ \underline{G}(U) & \xrightarrow{\rho'_{VU}} & \underline{G}(V) \\ \varphi(U)^{-1}\downarrow & & \downarrow\varphi(V)^{-1} \\ \underline{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{VU}} & \underline{F}(V) \end{array}$$

La commutativité du 1er carré entraîne la commutativité du second :

$$\varphi(V) \circ \rho_{VU} = \rho'_{VU} \circ \varphi(U)$$
$$\Downarrow$$
$$\rho_{VU} \circ \varphi(U)^{-1} = \varphi(V)^{-1} \circ \rho'_{VU}$$

CQFD

Définition 1.6 : Soit $\underline{A}$ un faisceau d'anneaux sur X. On appelle "$\underline{A}$-module" un faisceau de groupes $\underline{F}$ sur X tel que, pour tout ouvert U de X, $\underline{F}(U)$ soit un $\underline{A}(U)$-module et tel que les opérations de restrictions $\rho_{UV} : \underline{F}(V) \longrightarrow \underline{F}(U)$ soient α_{UV}-linéaires (où $\alpha_{UV} : \underline{A}(V) \longrightarrow \underline{A}(U)$ désignent les restrictions de $\underline{A}$).
Un "morphisme de $\underline{A}$-modules" est un morphisme de faisceaux $\varphi : \underline{F} \longrightarrow \underline{G}$ tel que $\varphi(U) : \underline{F}(U) \longrightarrow \underline{G}(U)$ soient toutes $\underline{A}(U)$-linéaires. On notera qu'alors $\varphi_x : \underline{F}_x \longrightarrow \underline{G}_x$ est $\underline{A}_x$-linéaire.

(NB : Si $\{(M_i, f_{ji})\}_{i\in I}$ est un syst. inductif et si $M_i = A_i$-module où $\{(A_i, f'_{ji})\}_{i \in I}$ est encore un syst. ind., et si de plus les applications f_{ji} sont f'_{ji}-linéaires, alors $\varinjlim M_i$ est un $\varinjlim A_i$-module.) (cf R2)

2. Espaces étalés. Faisceau associé à un préfaisceau.

Définition 2.1 : Un <u>espace topologique</u> (resp. <u>espace étalé</u>) au dessus de l'espace topologique X est la donnée d'un couple (E,p) où E est un e.t. et où $p : E \to X$ est continue (resp. un homéomorphisme local)

Si (E,p) est un espace topologique au dessus de X et si $U \Subset X$, on note

$$\underline{C}(U,E) = \{\text{sections de } E \text{ sur } U\} \doteq \{ s : U \to E \text{ continues } / \; p\circ s = id_U \}$$

On notera aussi $E(x) = p^{-1}(x)$ la fibre de p au dessus de x.

Un morphisme d'espaces topologiques au dessus de X est une application continue $f : E \to E'$ telle que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & p \searrow \quad \swarrow p' & \\ & X & \end{array}$$

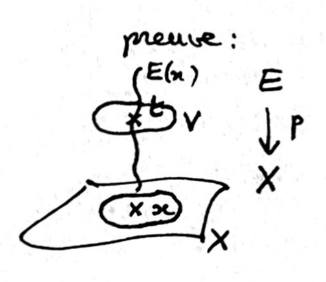
La correspondance $U \rightsquigarrow \underline{C}(U,E)$ définit un faisceau d'ensemble que l'on appelle le <u>faisceau des sections de l'espace topologique E au dessus de X</u>, (E,p). <u>On notera</u> $\underline{C}(E)$ ce faisceau et $\underline{C}(E)_x = \underline{C}_x(E)$.

On définit l'évaluation en $x \in X$ comme l'application

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_x : & \underline{C}_x(E) & \longrightarrow & E(x) = p^{-1}(x) \\ & s_x & \longmapsto & s(x) \end{array}$$

<u>Proposition 2.2</u> : Soit (E,p) un espace étalé au dessus de X. Alors, $\forall x \in X \quad \varepsilon_x : \underline{C}_x(E) \to E(x)$ est bijective.

preuve :



Il suffit de constater que tout point t de la fibre $E(x)$, ie vérifiant $p(t) = x$, est recapturé par une section s définie sur un voisinage x de X, et une seule. Comme p est un homéo. local, il existe un voisinage ouvert V de t dans E / $p|_V : V \to p(V)$ homéomorphisme. Alors $(p|_V)^{-1} : p(V) \to V$ est une section de E sur $p(V)$ et vérifie $(p|_V)^{-1}(x) = t$.

CQFD

2.3 Espace étalé associé à un préfaisceau.

Soit $\underline{E}$ un préfaisceau. On pose $E = \overset{\cdot}{\bigcup} \underline{E}_x$ et $p : E \longrightarrow X$, et
$t \in E(x) \longmapsto x$

on munit E de la topologie la plus fine rendant toutes les sections
$\tilde{s} : U \longrightarrow E$ (où $s \in \underline{E}(U)$) continues.
$x \longmapsto s_x$

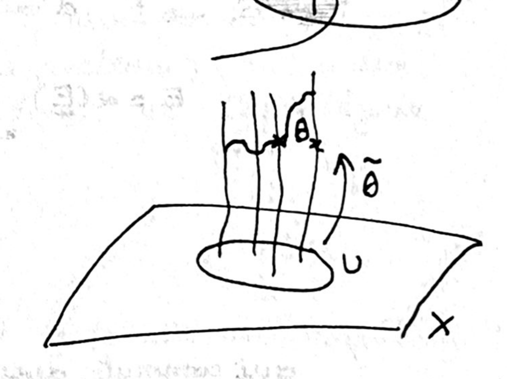
Ainsi Ω est un ouvert de E ssi $\forall s \in \underline{E}(U)$ $\tilde{s}^{-1}(\Omega)$ est ouvert dans X.

2.4 Proposition et définition : (E,p) ainsi défini est un espace étalé. On l'appelle l'espace étalé associé au préfaisceau $\underline{E}$.

preuve :

* p continue : $\forall V \Subset X$ $\Omega = p^{-1}(V)$ est ouvert dans E puisque si $s \in \underline{E}(U)$
$\tilde{s}^{-1}(\Omega) = \{x \in U \,/\, s(x) \in p^{-1}(V)\} = \{x \in U \,/\, x \in V\} = U \cap V$

* p homéomorphisme local :
D'après la définition de $\underline{E}_x$, si $\theta_x \in \underline{E}_x = E(x)$,
il existe un voisinage ouvert U de x et une section
$\theta \in \underline{E}(U)$ telle que $\theta(x) = \theta_x$.
On définit alors
$$\tilde{\theta} : U \longrightarrow \tilde{\theta}(U)$$
$$x \longmapsto \theta_x$$



et il faut montrer que $\tilde{\theta}(U)$ est un ouvert,
que $\tilde{\theta}$ est continue et que $\tilde{\theta}$ est un inverse local de p.
Le dernier point est évident.

* $\tilde{\theta}(U)$ ouvert : $\forall s \in \underline{E}(V)$ $\tilde{s}^{-1}(\tilde{\theta}(U)) = \{y \in V \,/\, s_y \in \tilde{\theta}(U)\}$
$= \{y \in U \cap V \,/\, s_y = \theta_y\}$ est bien ouvert car $\theta_y = s_y$ sont des germes, donc coïncident localement lorsqu'ils coïncident en un point.

* $\tilde{\theta} : U \longrightarrow \tilde{\theta}(U)$ est continue car $\tilde{\theta} : U \rightarrow E$ est continue
(puisque $\theta \in \underline{E}(U)$, et par définition de la topologie sur E)

CQFD

Remarque : La topologie de E n'est pas séparée, en général.

Notons { <u>Préfaisc.</u> la catégorie des préfaisceaux sur X,
<u>Esp. étal.</u> la catégorie des espaces étalés au dessus de X,
<u>Faisc.</u> la catégorie des faisceaux sur X.

<u>Proposition 2.5</u> : On peut définir les 2 foncteurs :

α : <u>Préfaisc.</u> $\longrightarrow$ <u>Esp. étal.</u>

β : <u>Esp. étal.</u> $\longrightarrow$ <u>Faisc.</u>

preuve :

α : <u>Préfaisc.</u> $\longrightarrow$ <u>Esp. étal.</u>

préfaisceau $\underline{E}$ $\longmapsto$ espace étalé E associé à $\underline{E}$

Si $\underline{E} \xrightarrow{\varphi} \underline{F}$ est un morphisme de préfaisceaux, on sait définir $\varphi_x : \underline{E}_x \to \underline{F}_x$ d'où un morphisme $\alpha(\varphi) = \{\varphi_x\}_{x\in X}$:

$$E = \alpha(\underline{E}) = \dot{\bigcup_{x\in X}} \underline{E}_x \xrightarrow{\alpha(\varphi)} F = \alpha(\underline{F}) = \dot{\bigcup_{x\in X}} \underline{F}_x$$

$$p : E \to X, \qquad p' : F \to X$$

qui commute avec les projections p et p'. $\alpha(\varphi)$ est bien continue, puisque si Ω' est un ouvert de F,

$$\Omega = \alpha(\varphi)^{-1}(\Omega') \text{ ouvert de } E \Leftrightarrow \forall s\in \underline{E}(U)\ \tilde{s}^{-1}(\Omega) \overset{(*)}{=} \widetilde{(\varphi(U)(s))}^{-1}(\Omega')$$

~~$(\widetilde{\varphi\circ s})^{-1}(\Omega')$~~

ouvert par définition de la topologie de F (car ~~$\varphi\circ s \in \underline{F}(U)$~~) car $\varphi(U)(s) \in \underline{F}(U)$

L'(*) se montre directement :

$$\tilde{s}^{-1}(\Omega) = \{x\in X \ /\ s_x \in \alpha(\varphi)^{-1}(\Omega')\}$$
$$= \{x\in X \ /\ \varphi_x(s_x) \in \Omega'\}$$
$$= \{x\in X \ /\ \varphi\circ s(x) \in \Omega'\} \quad \text{car } \varphi_x(s_x) = \varphi\circ s(x)$$

(corrigé : ~~$\varphi\circ s\,(x)$~~ $(\varphi(U)(s))_x$)

$$= (\widetilde{\varphi\circ s})^{-1}(\Omega')$$
$$= \{x\in X \ /\ (\varphi(U)(s))_x \in \Omega'\} \quad \text{car } \varphi_x(s_x) = (\varphi(U)(s))_x \quad \text{cf R1}$$
$$= \widetilde{(\varphi(U)(s))}^{-1}(\Omega')$$

β : Esp. étal. $\longrightarrow$ Faisc.

$E \longmapsto \underline{C}(E)$ = faisceau des sections de l'espace étalé E

Si $f : E \to E'$ est un morphisme d'espaces étalés, et si $s : U \to E$ on définit $\beta(f)(s) = f \circ s : U \to E'$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & p \searrow \; \swarrow p' & \\ & X & \end{array}$$

CQFD

Notons que $\beta \circ \alpha$: Préfaisc. $\longrightarrow$ Faisc est un foncteur. On dit

$\underline{E} \longmapsto \underline{C}(E)$

que $\beta \circ \alpha(\underline{E})$ est le faisceau associé au préfaisceau $\underline{E}$.

Proposition 2.6 :

Notons α_F la restriction du foncteur α à la catégorie des Faisceaux. Alors :

Faisc. $\xrightarrow{\alpha_F}$ Esp. étal. $\xrightarrow{\beta}$ Faisc

Alors α_F et β sont inverses l'un de l'autre, à isomorphisme près, ie $\beta \circ \alpha_F \simeq Id$ et $\alpha_F \circ \beta \simeq Id$ ($\simeq$ isomorphisme de foncteurs). On a donc une équivalence de catégorie entre la catégorie Faisc. et la catégorie Esp. étal.

Proposition 2.7 : $\varphi(U) : \underline{E}(U) \longrightarrow \beta \circ \alpha(\underline{E})(U)$ définit un morphisme φ

$s \longmapsto \tilde{s}$

de préfaisceau, et l'on a :

$\underline{E}$ est un faisceau $\Longleftrightarrow$ φ est un isomorphisme

preuve : Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \beta \circ \alpha(\underline{E})(U) \\ s & \longmapsto & \tilde{s} \quad \text{où } \tilde{s}(x) = s_x \\ \rho_{VU} \downarrow & & \downarrow \rho'_{VU} \\ \underline{E}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \beta \circ \alpha(\underline{E})(V) \end{array} \qquad (V \subset U)$$

est commutatif,

et $\varphi_x : \underline{E}_x \longrightarrow \beta \circ \alpha(\underline{E})_x = \underbrace{\underline{C}_x(\alpha(\underline{E}))}_{\simeq \, \alpha(\underline{E})(x) \text{ par } E_x}$ est bijectif, donc la prop. 1.5

$s_x \longmapsto s_x$

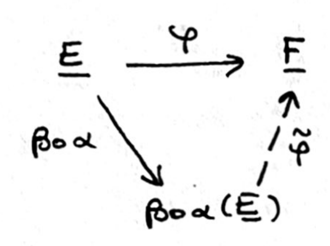
permet de conclure.

CQFD

$(\Leftarrow)$?

2.8 Problème universel du faisceau associé au préfaisceau :

Soit $\underline{E}$ un préfaisceau, et $\beta\circ\alpha(\underline{E})$ son faisceau associé. Pour tout faisceau $\underline{F}$ et pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \underline{E} \longrightarrow \underline{F}$, il existe un et un seul morphisme de faisceaux $\tilde{\varphi}$ qui rende le diagramme



commutatif

preuve :

Si $U \subseteq X$, $\beta\circ\alpha(U) : \underline{E}(U) \longrightarrow \beta\circ\alpha(\underline{E})(U)$, $\tilde{s}$ étant bien continue
$s \longmapsto \tilde{s} = \{x \mapsto s_x\}$
d'après 2.3. Soit $\varphi(U) : \underline{E}(U) \longrightarrow \underline{F}(U)$ est donné.
$s \longmapsto \varphi(U)(s)$

Si $\tilde{s} \in \beta\circ\alpha(\underline{E})(U)$ et $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V de x inclus dans U et $s \in \underline{E}(V)$ tels que $\tilde{s}|_V = \{x \mapsto s_x\}$. On pose alors :

$$\tilde{\varphi}(V)(\tilde{s}|_V) = \varphi(V)(s)$$

Ainsi, en considérant $\beta\circ\alpha(\underline{E})$ et $\underline{F}$ comme des espaces étalés, on a posé :

$$\tilde{\varphi}_x(\tilde{s}_x) = \varphi_x(s_x) \qquad (1)$$

Il suffit de constater que $\tilde{\varphi} = \{\tilde{\varphi}_x\}_{x\in X}$ est continue pour conclure à l'existence de $\tilde{\varphi}$.

L'unicité de $\tilde{\varphi}$ est immédiate (cf (1)).

CQFD

3. Rappels sur les catégories.

La déf. d'une catégorie et de foncteurs entre catégories est supposée connue. Ce qui suit est développé dans le livre de Cartan, "éléments d'algèbres homologique".

3.1 Définitions.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

$f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ est un *épimorphisme* ssi $\forall g, g' \in \mathrm{Hom}(B,C)$ $g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g'$

$f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ est un *monomorphisme* ssi $\forall g, g' \in \mathrm{Hom}(C,A)$ $f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'$

$f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ est un *isomorphisme* ssi $\exists g \in \mathrm{Hom}(B,A)$ $\exists g' \in \mathrm{Hom}(A,B)$ tels que $f \circ g = id_B$ et $g \circ f = id_A$.

Il est clair que f isomorphisme $\Rightarrow$ f est un épi- et un monomorphisme. La réciproque est fausse en général (mais sera vraie pour la catégorie des faisceaux sur X)

3.2 Objet initial, objet final, objet nul.

Un objet P est dit *initial (resp. final)* si $\mathrm{Hom}(P,X)$ est réduit à un seul élément (resp. si $\mathrm{Hom}(X,P)$ est réduit à un seul élément) pour tout objet X de $\mathcal{C}$.

Notons que 2 objets initiaux (resp. finaux) sont isomorphes : en effet, si P et P' sont initiaux, $\mathrm{Hom}(P,P') = \{f_P\}$; $\mathrm{Hom}(P',P) = \{f_{P'}\}$; $\mathrm{Hom}(P,P) = \{id_P\}$ et $\mathrm{Hom}(P',P') = \{id_{P'}\}$ d'où $f_P \circ f_{P'} = id_{P'}$ et $f_{P'} \circ f_P = id_P$.

Un objet à la fois final et initial s'appelle *l'objet nul* de la catégorie. On le note 0. Le *morphisme nul* est l'unique morphisme de $\mathrm{Hom}(0,0)$.

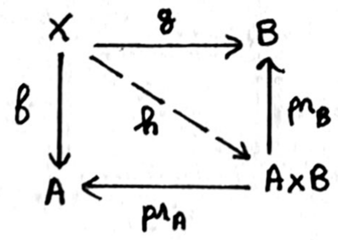
Le morphisme nul de A vers B est la composée des 2 morphismes (uniques) de $\mathrm{Hom}(A,0)$ et $\mathrm{Hom}(0,B)$: $A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$

Dans une catégorie, beaucoup de notions sont créées par l'énoncé d'un problème universel, comme nous allons le voir :

3.3 Somme et produit de 2 objets : (*)

Soient A et B 2 objets. Le *produit* $A \times B$ est l'unique objet, à isomorphisme près, qui vérifie la propriété universelle suivante :

"Il existe des flèches $pr_A : A \times B \to A$ et $pr_B : A \times B \longrightarrow B$ telles que, pour toute flèches $f : X \to A$ et $g : X \to B$ il existe une flèche $h : X \longrightarrow A \times B$ qui rende le diagramme suivant commutatif:



(*) tout ce qui suit est en fait donné pour un nbre infini d'objets.

ie f et g se factorisent à travers $A \times B$.

Somme : La somme $A \oplus B$ est l'unique objet, à isomorphisme près, qui vérifie : " Il existe des flèches $i_A : A \to A \oplus B$ et $i_B : B \to A \oplus B$ telles que, pour toute flèches $f : X \to A$ et $g : X \to B$ l'on puisse trouver une flèche unique $h : X \to A \oplus B$ rendant le diagramme suivant commutatif :

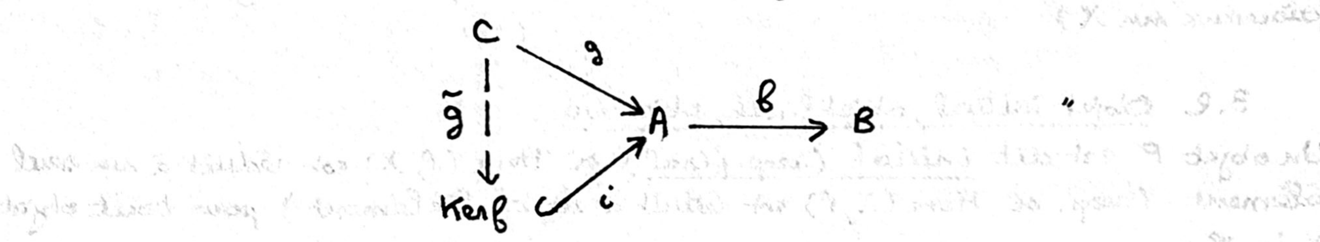
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & \searrow h & \downarrow i_B \\ A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus B \end{array}$$ ".

(Les notions de somme et produit coïncident dans le cas où il y a un nombre fini de termes.)

3.4 Noyau et conoyau

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec un objet nul, et $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$. Le noyau $\mathrm{Ker} f$ de f est la solution du problème universel :

" $\mathrm{Ker} f$ est un objet et $i \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker} f, A)$ est fixé, de sorte que $f \circ i = 0$ et que tout morphisme $g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ tel que $f \circ g = 0$ se factorise de manière unique en $\tilde{g} \in \mathrm{Hom}(C, \mathrm{Ker} f)$ à travers $\mathrm{Ker} f$.

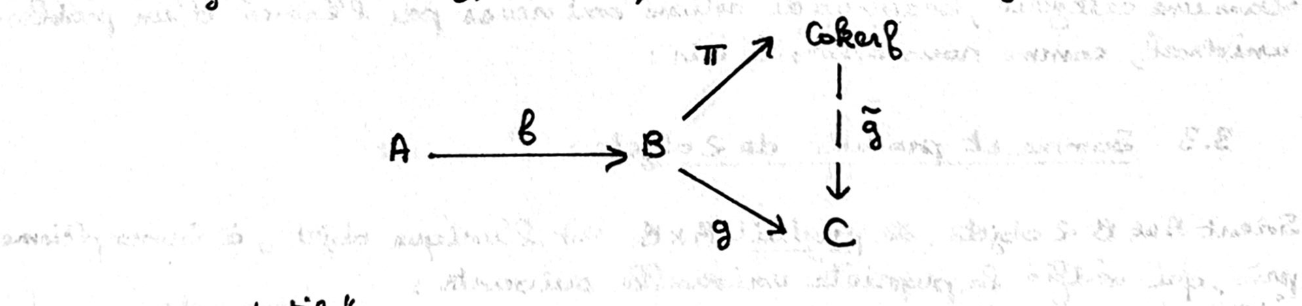


"

i est un monomorphisme puisque si $h, h' \in \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Ker} f)$ et $i \circ h = i \circ h'$ on a $f \circ i \circ h = f \circ i \circ h' = 0$ d'où, d'après l'unicité du problème universel, $h = h'$.

Le conoyau $\mathrm{Coker} f$ de $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$ est la solution du problème universel :

" $\mathrm{Coker} f$ est un objet et $\pi \in \mathrm{Hom}(B, \mathrm{Coker} f)$ sont tels que, $\pi \circ f = 0$ et pour tout morphisme $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ tel que $g \circ f = 0$, il existe $\tilde{g} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Coker} f, C)$ unique rendant le diagramme :



commutatif ".

3.5 <u>Images et coimages</u>.

3.6 <u>Catégorie additive</u>.

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite <u>additive</u> si elle vérifie :

1) $\forall A, B$ objets de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(A,B)$ est un groupe abélien
2) La composition des morphismes est bilinéaire.
3) Il existe un objet nul de $\mathcal{C}$.
4) Il existe des sommes et des produits dans $\mathcal{C}$.

exercice : Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive,
g monomorphisme $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, g = 0$
g épimorphisme $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Coker}\, g = 0$

3.7 <u>Catégorie abélienne</u>.

Une <u>catégorie abélienne</u> est une catégorie additive telle qu'il existe des noyaux et des conoyaux ; Alors on peut montrer qu'il existe des images et des coimages et l'on impose la condition $\mathrm{Im} f \simeq \mathrm{coim} f$, l'isomorphisme canonique étant $A/_{\mathrm{Ker} f} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im} f$.

<u>exemple</u> : On va vérifier que la catégorie des faisceaux de $\underline{A}$-<u>modules</u> sur X est une catégorie abélienne (cf β)).

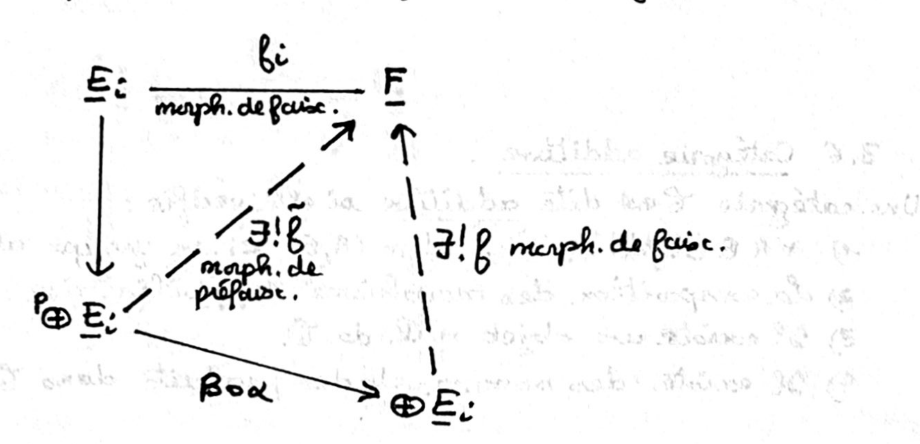
α) Prenons la catégorie <u>Préfaisc</u>. des préfaisceaux de groupes. Si $\varphi : \underline{F} \to \underline{G}$ est un morphisme de préfaisceaux, on a :

$\mathrm{Ker}\varphi$ défini par $(\mathrm{Ker}\varphi)(U) = \mathrm{Ker}\, \varphi(U)$
$\mathrm{Im}\varphi$ " " $(\mathrm{Im}\varphi)(U) = \mathrm{Im}\, \varphi(U)$

où $\varphi(U) : \underline{F}(U) \longrightarrow \underline{G}(U)$ et $\varphi = \{\varphi(U)\}_{U \in X}$.

β) La catégorie $\mathcal{C}$ des faisceaux de $\underline{A}$-<u>modules</u> (cf 1.6) sur X est une catégorie abélienne. Si $\underline{A}$ est un faisceau d'anneaux sur X et si $\underline{E}_i$ est une famille de $\underline{A}$-modules, vérifions que la somme $\oplus\, \underline{E}_i$ existe.

Posons : $\oplus \underline{E}_i \doteqdot$ faisceau associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow \oplus \underline{E}_i(U)$ et vérifions la propriété universel des sommes directes. Pour tout morphismes de faisceaux $f_i : \underline{E}_i \longrightarrow \underline{F}$, il existe un et un seul morphisme de préfaisceaux $\tilde{f} : {}^{P}\oplus \underline{E}_i \longrightarrow \underline{F}$, où ${}^{P}\oplus \underline{E}_i$ désigne le préfaisceau $U \rightsquigarrow \oplus \underline{E}_i(U)$, et la propriété universel du faisceau associé au préfaisceau (cf. 2.8) montre l'existence d'un unique morphisme de faisceaux f dans le diagramme :



4. Constructions avec les faisceaux de $\underline{A}$-modules.

4.1 Produit tensoriel

Soient $\underline{E}$ et $\underline{F}$ deux $\underline{A}$-modules, où $\underline{A}$ désigne un faisceau d'anneaux sur X. Le faisceau associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow \underline{E}(U) \underset{\underline{A}(U)}{\otimes} \underline{F}(U)$ s'appelle le faisceau produit tensoriel de $\underline{E}$ par $\underline{F}$. On le note $\underline{E} \otimes_{\underline{A}} \underline{F}$

Il vérifie la propriété universelle :

$\forall\, \underline{G} = \underline{A}$-module $\quad \forall f$ bilinéaire $\quad \exists!\, \tilde{f}$ morphisme de faisceau /

$$\text{faisceau } \underline{E}(U) \times \underline{F}(U) \xrightarrow{\ f\ } \underline{G}$$
$$\searrow \qquad \nearrow \tilde{f}$$
$$\underline{E} \otimes \underline{F}$$

(utiliser 2.8, et la démonstration est du type ci-dessus)

C'est vrai au niveau des préfaisceaux et :

$$\text{faisceau } \underline{E}(U) \times \underline{F}(U) \xrightarrow{\ f\ } \underline{G}(U)$$
$$\searrow \qquad \nearrow \exists!\, \tilde{f}_1 \qquad \nwarrow \exists!\, \tilde{f} \text{ (cf. 2.8)}$$
$$\underline{E}(U) \underset{\underline{A}(U)}{\otimes} \underline{F}(U) \xrightarrow{\ \beta o \alpha\ } \underline{E} \underset{\underline{A}}{\otimes} \underline{F}$$

Fibre de $\underline{E} \otimes \underline{F}$:

On a $(\underline{E} \otimes \underline{F})_x = \underline{E}_x \otimes \underline{F}_x$.

(Cela provient de $\varinjlim M_i \otimes N_i = \varinjlim M_i \otimes \varinjlim N_i$)

<u>Propriété d'adjonction</u> : $\quad Hom(\underline{E}, Hom(\underline{F}, \underline{G})) \simeq Hom(\underline{E} \otimes \underline{F}, \underline{G})$

(Cela provient de l'isomorphisme canonique $Hom(\underline{E}, Hom(\underline{F}, \underline{G})) \simeq Bil(\underline{E} \times \underline{F}, \underline{G})$)

4.2 Sous-modules, modules quotients

Soit $\underline{E}$ un faisceau de $\underline{A}$-module. Un faisceau $\underline{E}'$ de $\underline{A}$-module tel que pour tout ouvert U de X $\underline{E}'(U) \subset \underline{E}(U)$ soit un morphisme de faisceau s'appelle un <u>sous-faisceau de $\underline{A}$-module de $\underline{E}$</u>.

Si $\underline{E}'$ est un sous-faisceau de $\underline{E}$, on définit le faisceau quotient $\underline{E}/\underline{E}'$ comme le faisceau associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow \underline{E}(U)/\underline{E}'(U)$

$\underline{E}/\underline{E}'$ est alors un faisceau de <u>$\underline{A}$-module</u> et si $x \in X$, la fibre de $\underline{E}/\underline{E}'$ au dessus de x est :

$$\left(\underline{E}/\underline{E}'\right)_x = \underline{E}_x/\underline{E}'_x$$

Cela provient du fait que <u>le foncteur limite inductive est exact</u>. En effet, on a :

$$0 \to \underline{E}'(U) \to \underline{E}(U) \to \underline{E}(U)/\underline{E}'(U) \to 0$$

d'où

$$0 \to \varinjlim \underline{E}'(U) \to \varinjlim \underline{E}(U) \to \varinjlim \underline{E}(U)/\underline{E}'(U) \to 0$$

$$\qquad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \| $$

$$\underline{E}'_x \qquad \underline{E}_x \qquad \left(\underline{E}/\underline{E}'\right)_x$$

d'où $\left(\underline{E}/\underline{E}'\right)_x = \underline{E}_x/\underline{E}'_x$

Notons au passage la formule $\varinjlim_{x \in U \subset X} \underline{E}(U)/\underline{E}'(U) = \varinjlim \underline{E}(U) / \varinjlim \underline{E}'(U)$.

4.3 Noyaux et images.

Soit $\varphi : \underline{E} \to \underline{F}$ un morphisme de faisceaux de $\underline{A}$-modules. Le préfaisceau $U \rightsquigarrow Ker\,\varphi(U)$ où $\varphi(U) : \underline{E}(U) \to \underline{F}(U)$ et $\varphi = \{\varphi(U)\}_U$ est déjà un faisceau dont les fibres sont :

$$(Ker\,\varphi)_x = Ker\,\varphi_x$$

En effet, par passage à la limite inductive dans la suite exacte

$$0 \to Ker\,\varphi(U) \to \underline{E}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \underline{F}(U)$$

on obtient :

$$0 \to (Ker\,\varphi)_x \to \underline{E}_x \xrightarrow{\varphi_x} \underline{F}_x$$

$\operatorname{Im}\varphi$ désigne le faisceau associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow \operatorname{Im}\varphi(U)$, et l'on a :

$$(\operatorname{Im}\varphi)_x = \operatorname{Im}\varphi_x$$

en passant à la limite inductive dans la suite exacte :

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi(U) \to \underline{E}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \operatorname{Im}\varphi(U) \to 0$$

pour obtenir :

$$0 \to (\operatorname{Ker}\varphi)_x \to \underline{E}_x \xrightarrow{\varphi_x} (\operatorname{Im}\varphi)_x \to 0$$

ie $(\operatorname{Im}\varphi)_x \simeq E_x / \operatorname{Ker}\varphi_x$ car $(\operatorname{Ker}\varphi)_x = \operatorname{Ker}\varphi_x$

$\simeq \operatorname{Im}\varphi_x$.

4.4 Suite exacte de faisceaux.

Soit $\underline{E}' \xrightarrow{\varphi} \underline{E} \xrightarrow{\psi} \underline{E}''$ un complexe de faisceaux (ie $\psi\circ\varphi = 0$)

Il existe un morphisme canonique de faisceaux

$$\operatorname{Im}\varphi \underset{i}{\hookrightarrow} \operatorname{Ker}\psi$$

Notons $\operatorname{Pref}\operatorname{Im}\varphi$ le préfaisceau $U \rightsquigarrow \operatorname{Im}\varphi(U)$ qui sert à définir le faisceau image $\operatorname{Im}\varphi$. La propriété 2.8 donne l'existence d'un unique morphisme de faisceau i tel que :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Pref}\operatorname{Im}\varphi & \overset{\tilde{i}}{\hookrightarrow} & \operatorname{Ker}\psi \\ & {\scriptstyle \text{Boa}} \searrow & \nearrow {\scriptstyle i} \\ & \operatorname{Im}\varphi & \end{array}$$

où $\tilde{i}(U) : \operatorname{Im}\varphi(U) \hookrightarrow \operatorname{Ker}\psi(U)$

X Ce morphisme i est injectif car $\operatorname{Im}\varphi_x \overset{i_x}{\hookrightarrow} \operatorname{Ker}\psi_x$ est injectif $\forall x \in X$

donc $\operatorname{Im}\varphi(U) \to \operatorname{Ker}\psi(U)$ est injectif

si $s \longmapsto 0$, on a $s_x = 0 \quad \forall x\in X \Rightarrow s = 0$.

De plus, $\operatorname{Im}\varphi \hookrightarrow \operatorname{Ker}\psi$ est un monomorphisme (ie $\operatorname{Ker} i = 0$)

On dira que la suite $\underline{E}' \xrightarrow{\varphi} \underline{E} \xrightarrow{\psi} \underline{E}''$ est exacte si $\operatorname{Im}\varphi \simeq \operatorname{Ker}\psi$.

4.4.1 Proposition : $\underline{E}' \xrightarrow{\varphi} \underline{E} \xrightarrow{\psi} \underline{E}''$ est une suite exacte de faisceaux ssi $\forall x \in X \quad \operatorname{Im}\varphi_x \simeq \operatorname{Ker}\psi_x$

preuve : Il suffit donc de le montrer fibre à fibre. Voir prop. 1.5.

NB : En particulier, $\operatorname{Im}\varphi(U) \simeq \operatorname{Ker}\psi(U) \quad \forall U \subset X$

4.4.2. Proposition : Si $0 \to \underline{E}' \xrightarrow{\varphi} \underline{E} \xrightarrow{\psi} \underline{E}''$ est une suite exacte de faisceaux, la suite

$$0 \to \underline{E}'(U) \to \underline{E}(U) \longrightarrow \underline{E}''(U) \quad \text{est exacte.}$$

En d'autres termes, le foncteur section sur U est exact à gauche.

preuve :

* La suite $0 \to \underline{E}'(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \underline{E}(U) \xrightarrow{\psi(U)} \underline{E}''(U)$ est un complexe car $\psi \circ \varphi = 0$ implique $\psi(U) \circ \varphi(U) = 0$.
* $\varphi(U)$ est injectif
* $\operatorname{Ker} \psi(U) = \operatorname{Im} \varphi(U)$? On a déjà $\operatorname{Im} \varphi(U) \subset \operatorname{Ker} \psi(U)$. Inversement, si $\lambda \in \operatorname{Ker} \psi(U)$ $\quad \lambda_x \in \operatorname{Ker} \psi_x = \operatorname{Im} \varphi_x \Rightarrow \lambda_x = \varphi_x(s_x)$ où $s_x \in \underline{E}'_x$

donc, localement : $\quad \lambda_{,W_x} = \varphi(W_x)\, s_{,W_x}$

où $\lambda_{,W_x} \in \underline{E}(W_x)$ et $\rho_x(\lambda_{,W_x}) = \lambda_x$ $\quad$ (ρ_x = germe en x)

$s_{,W_x} \in \underline{E}'(W_x)$ et $\rho_x(s_{,W_x}) = s_x$

On a :

$$\varphi(W_x \cap W_y)\left(s_{,W_x}|_{W_x \cap W_y}\right) = \varphi(W_x \cap W_y)\left(s_{,W_y}|_{W_x \cap W_y}\right)$$
$$\| $$
$$\lambda|_{W_x \cap W_y}$$

et $\varphi(W_x \cap W_y)$ est injective, donc $s_{,W_x}|_{W_x \cap W_y} = s_{,W_y}|_{W_x \cap W_y}$, desorte que nous puissions recoller les sections locales

$$s_{,W_x} \in \underline{E}'(W_x)$$

pour obtenir $s \in \underline{E}'(U)$ qui vérifie $\varphi(U)(s) = \lambda$.

CQFD

Remarque 4.4.3 :

Le foncteur section sur un ouvert n'est pas exact à droite. On a le contre-exemple suivant :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$
$$f \longmapsto e^{i2\pi f}$$

où $\mathcal{O}^*$ est le faisceau multiplicatif défini par $\mathcal{O}^*(U) = \{$fcts holomorphes sur U qui ne s'annulent pas sur U$\}$.

5. Image réciproque d'un faisceau par une application continue.

Soient $f : X \to Y$ continue et $\mathcal{F}$ un faisceau de base Y, donné sous la forme d'un espace étalé $\pi : \mathcal{F} \to Y$.

$\mathcal{f}^{-1}\mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \rightsquigarrow f^{-1}\mathcal{F}(U) = \{ t : U \to \mathcal{F} \text{ continue } / \pi \circ t = f \}$$

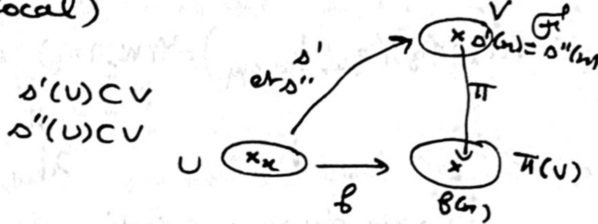
$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{F} \\ & \overset{t}{\nearrow} & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Notons que ce préfaisceau est déjà un faisceau.

5.1 lemme : Soient s' et s'' deux section de $f^{-1}\mathcal{F}$ au dessus d'un voisinage U de x.
Alors $s'_x = s''_x \in (f^{-1}\mathcal{F})_x \iff s'(x) = s''(x)$

preuve : $(\Rightarrow)$ trivial
$(\Leftarrow)$ $\exists U$ voisinage de x / $s'(x) = s''(x) = \pi^{-1} \circ f(x)$ (utiliser le fait que π est un homéomorphisme local)

CQFD



5.2 Proposition : Il existe un morphisme $\bar{f} : f^{-1}\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ d'espaces étalés au dessus de f, ie une application continue qui fasse commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}\mathcal{F} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où $f^{-1}\mathcal{F} \to X$ dénote l'espace étalé associé au faisceau $f^{-1}\mathcal{F}$.

preuve : On pose $\bar{f}(s'_x) \doteq s'(x)$ ~~s'_x~~. $\bar{f}$ fait commuter le diagramme, et $\bar{f}$ est continue :
$\forall \Omega$ ouvert de $\mathcal{F}$ $\bar{f}^{-1}(\Omega)$ ouvert ?
$\forall s \in f^{-1}\mathcal{F}(U)$ $\quad \tilde{s}^{-1}(\bar{f}^{-1}(\Omega)) = \{ x \in X / \tilde{s}(x) = s_x \in \bar{f}^{-1}(\Omega) \}$
$= \{ x \in X / s(x) \in \Omega \} = s^{-1}(\Omega)$ est bien ouvert. CQFD

NB : $\bar{f}$ induit une bijection de $(f^{-1}\mathcal{F})_x$ sur $\mathcal{F}_{f(x)}$. (cf cours sur les faisceaux)

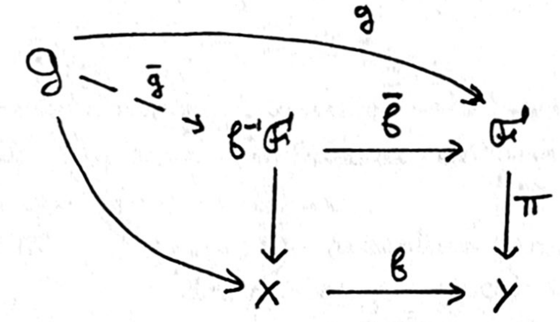
$$\boxed{(f^{-1}\mathcal{F})_x \simeq \mathcal{F}_{f(x)}}$$

5.3 Faisceau induit

Si $Y \subset X$ et si $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} X$ est un faisceau sur X, on note $\mathcal{F}|_Y = i^{-1}(\mathcal{F})$ où $i : Y \hookrightarrow X$. $i^{-1}(\mathcal{F})$ s'appelle le faisceau induit par $\mathcal{F}$ sur Y et ce n'est autre que $\pi : \mathcal{F} \cap \pi^{-1}(Y) \longrightarrow Y$
(On peut vérifier directement que $\mathcal{F}|_Y : \pi : \mathcal{F} \cap \pi^{-1}(Y) \longrightarrow Y$ est un faisceau.)

5.4 Problème universel

: Le faisceau réciproque est solution du problème universel suivant :
" Pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur X et pour tout morphisme $g : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ d'espaces étalés au dessus de f, g se factorise en $\bar{g}$ de manière unique :



5.5 Fonctorialité de l'image réciproque.

f^{-1} est un foncteur de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens (resp. d'espaces vectoriels, resp. de $\underline{A}$-modules dans la catégorie des $f^{-1}\underline{A}$-modules)* puisque si $\varphi : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ est un morphisme de faisceaux, où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont 2 faisceaux de base Y, on définit :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} & \\ s \nearrow & \downarrow \quad \swarrow & \\ X \xrightarrow{f} & Y & \end{array} \qquad f^{-1}(\varphi) : f^{-1}\mathcal{F}' \longrightarrow f^{-1}\mathcal{F}, \quad s \longmapsto \varphi \circ s$$

de plus :

Proposition : f^{-1} est un foncteur exact, ie si $f : X \to Y$ est continue, si $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont 3 faisceaux de base Y et si la suite de faisceaux

(1) $\quad 0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ est exacte,

alors la suite de faisceaux :

(2) $\quad 0 \longrightarrow f^{-1}\mathcal{F}' \xrightarrow{f^{-1}u} f^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{f^{-1}v} f^{-1}\mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ est exacte.

*cf R3

preuve : Il suffit de le vérifier fibre à fibre d'après la prop. 4.4.1, ie que la suite

$$0 \longrightarrow (f^{-1}\mathcal{F}')_x \xrightarrow{(f^{-1}u)_x} (f^{-1}\mathcal{F})_x \xrightarrow{(f^{-1}v)_x} (f^{-1}\mathcal{F}'')_x \longrightarrow 0$$

est exacte.

La NB de la prop. 5.2 montre qu'il revient au même de vérifier que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_{f(x)} \longrightarrow \mathcal{F}_{f(x)} \longrightarrow \mathcal{F}''_{f(x)} \longrightarrow 0$$

est exacte, ce qui est vrai si l'on s'aperçoit que, via les identifications, le morphisme $\mathcal{F}'_{f(x)} \to \mathcal{F}_{f(x)}$ n'est autre que $u_{f(x)}$, et le morphisme $\mathcal{F}_{f(x)} \to \mathcal{F}''_{f(x)}$ correspond à $v_{f(x)}$.

CQFD

6. Prolongement local d'une section (cf Godement, Théorie des faisceaux, 1.3.1 p113 et 3.3 p150)

Si $M \subset X$ et si $\mathcal{F}$ est un faisceau de base X, notons $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des sections (continues) au dessus de M. On considère ici le faisceau $\mathcal{F}$ comme un espace étalé au dessus de X. Si U est ouvert, $\mathcal{F}(U)$ désigne l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ sur U.

6.1. Lemme

$\mathcal{F}$ = faisceau de base X
$\{M_i\}_i$ = recouvrement de fermés localement fini de X
$\forall\, s_i \in \mathcal{F}(M_i) \quad s_i|_{M_i \cap M_j} = s_j|_{M_i \cap M_j} \quad \exists!\, s \in \mathcal{F}(X) \quad s|_{M_i} = s_i$

preuve : Ensemblistement, l'unicité est claire et s est bien définie (adopter résolument l'optique "un faisceau est un espace étalé" pour le voir). Il reste à montrer que s est continue.

$\forall x \in X \quad s(x) \in \mathcal{F}$ — $s(x)$ est recapturée par une section θ de $\mathcal{F}$ au dessus du voisinage ouvert U de x, ie $\theta \in \mathcal{F}(U)$ et $\theta(x) = s(x)$

U rencontre un nombre fini $M_1, \ldots, M_p$ de M_i, par hypothèse, et comme tous les M_i sont fermés, on peut supposer que $x \in M_1 \cap \ldots \cap M_p$ quitte à prendre un ouvert U plus petit.

$\theta|_{U \cap M_1}$ est une section de $\mathcal{F}$ au dessus de $U \cap M_1$ et $\theta(x) = s(x) = s_1(x)$
$s_1|_{M_1 \cap U}$ est aussi une section de $\mathcal{F}$ au dessus de $U \cap M_1$ telle que $s_1(x) = s(x)$.
D'après l'unicité (locale) de telles sections qui coïncident en un point (cela provient de l'homéomorphisme local $\pi : \mathcal{F} \to X$ qui donne naissance à un homéomorphisme local $\pi : \mathcal{F} \cap \pi^{-1}(Y) \to Y$ lorsque $Y \subset X$) on obtient l'existence d'un voisinage Ω_1 de x dans X, Ω_1 ouvert, tel que :

$$\forall y \in \Omega_1 \cap M_1 \cap U \quad s_1(y) = \theta(y)$$

Ainsi :

$$\forall y \in U \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{p} \Omega_i \Big) \quad \theta(y) = s(y)$$

puisque $\forall y \in U \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{p} \Omega_i \Big) \quad \exists i \;\; y \in M_i \Rightarrow y \in \Omega_i \cap M_i \cap U$
$\Rightarrow s(y) = s_i(y) = \theta(y)$.

Finalement s est continue en x.

CQFD

6.2 Rappels de topologie

6.2.1 Un espace topologique est dit <u>paracompact</u> s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement plus fin localement fini

6.2.2 Un espace topologique est dit <u>normal</u> s'il est séparé et si pour tout recouvrement localement fini d'ouverts $\{U_i\}_i$ il existe un recouvrement ouvert $\{V_i\}_i$ tel que $\overline{V_i} \subset U_i$.

(cf. Schwartz Topologie générale et analyse fonctionnelle, chap. XXII)

Alors :

1) métrisable $\Rightarrow$ paracompact $\Rightarrow$ normal
2) Tout fermé d'un paracompact est paracompact
3) Tout fermé d'un paracompact admet un système fondamental de voisinages paracompacts.

6.3 Théorème du prolongement des sections

$\mathcal{F}$ = faisceau de base X
S = sous-ensemble de X admettant un système fondamal de voisinages paracompact
Alors toute section $s \in \mathcal{F}(S)$ se prolonge en une section sur un voisinage de S.

preuve :
<u>On peut supposer X paracompact</u> car S admet un syst. fond. de vois. paracompacts.
Recouvrons S par des ouverts U_i tels que
$\exists\, s_i \in \mathcal{F}(U_i) \quad s = s_i$ sur $S \cap U_i$

(Un tel recouvrement existe, puisque $s \in \mathcal{F}(S)$ et il existe $s_i \in \mathcal{F}(U_i) / \ s_i(x) \stackrel{?}{=} s(x)$, donc s et s_i coïncident en x, donc sur tout $S \cap U_i$ d'après l'unicité des sections sur $S \cap U_i$ qui valent $s(x)$ en x (cf prop. 2.2))

$\bigcup_i U_i$ est un voisinage de S et l'on peut supposer que X est paracompact inclus dans $\bigcup_i U_i$. Sous cette nouvelle hypothèse, on a $X = \bigcup_i U_i$

On peut supposer que le recouvrement $\{U_i\}$ est localement fini de X quitte à en restreindre le nombre et la finesse (cf. 6.2.1)
Comme X est normal, il existe un recouvrement $\{V_i\}$ de X tel que $\bar{V}_i \subset U_i$.

Soit $W = \{x \in X \,/\, x \in \bar{V}_i \cap \bar{V}_j \Rightarrow s_i(x) = s_j(x)\}$

Alors $S \subset W$ et le lemme 6.1 montre qu'il existe $s \in \mathcal{F}(W)$ qui prolonge $s \in \mathcal{F}(S)$ (prendre $M_i = \bar{V}_i$)

<u>Montrons que W est un voisinage de S</u>
$\forall x \in S$ $\exists W_x$ voisinage ouvert de x qui, parmi les $\bar{V}_i$, ne rencontre que $\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_p$.
Quitte à diminuer W_x, on peut supposer que $x \in \bar{V}_1 \cap \ldots \cap \bar{V}_p$ et que $W_x \subset \bar{U}_1 \cap \ldots \cap \bar{U}_p$ (car $\bar{V}_i \subset U_i$)
$s_1(x) = \ldots = s_p(x)$ et $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ donc, d'après l'unicité des sections qui coïncident en un point x, il existe W_x voisinage ouvert de x assez petit tel que $s_1 = \ldots = s_p$ sur W_x. Mais alors $W_x \subset W$ par définition de W.

CQFD

<u>6.4 Corollaire</u>

$\mathcal{F}$ = faisceau sur X
S = partie de X admettant un système fondamental de voisinages paracompacts.
Alors

$$\mathcal{F}(S) = \varinjlim_{S \subset U} \mathcal{F}(U)$$

preuve :

$$\xi : \varinjlim_{S \subset U \in X} \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(S) \quad \text{est surjective d'après le Th. 6.3}$$

$$\dot{s} \longmapsto s|_S$$

Si $t, s \in \mathcal{F}(U)$ vérifient $t(x) = s(x)$ $\forall x \in S$, alors pour tout $x \in S$ il existe un voisinage W_x de x tel que $t|_{W_x} = s|_{W_x}$. Ainsi $t = s$ sur un voisinage $W = \bigcup_{x \in S} W_x$ de S donc $\dot{t} = \dot{s}$.

CQFD

<u>Remarque</u> : Le corollaire 6.4 s'applique notamment :
* si X est paracompact et S fermé,] cf 6.2 3)
(ou * si X est métrisable et S quelconque.

7. Suite exacte associée à un sous-espace localement fermé

(cf. Godement 2.9 p 138)

7.1 Définition : On dit qu'un sous-espace Y de X est localement fermé s'il vérifie l'une des 2 propriétés équivalentes suivantes :

i) $\forall a \in Y \quad \exists U$ voisinage ouvert de a dans $X \quad U \cap Y$ fermé dans U

ii) $Y = U \cap F$ où U ouvert de X et F fermé de X.

Théorème 7.2 : Soit A un ensemble localement fermé de X.

$\forall \mathcal{L}$ faisceau de groupes abéliens sur A

$\exists!\ \mathcal{L}^X$ faisceau de groupes abéliens sur X qui vérifie les 2 conditions :

(1) $\quad \mathcal{L}^X|_A \simeq \mathcal{L}$

(2) $\quad \mathcal{L}^X|_{X \setminus A} \simeq 0$

$\mathcal{L}^X$ s'appellera faisceau prolongé par 0 du faisceau $\mathcal{L}$ sur A.

preuve :

* Unicité : Si $\mathcal{L}^X$ existe et vérifie (1) et (2), on peut définir l'application

$$\varphi : \mathcal{L}^X(U) \longrightarrow \mathcal{L}(U \cap A)$$
$$s \longmapsto s|_{U \cap A}$$

pour tout ouvert U de X. φ est injective car $\mathcal{L}^X(x) = 0$ si $x \in X \setminus A$, de sorte que $\mathcal{L}^X(U) \simeq \mathrm{Im}\,\varphi$.

$\mathrm{Im}\,\varphi = \{ s \in \mathcal{L}(U \cap A) \ /\ s$ reste continue lorsqu'elle est prolongée par 0 dans $U \setminus (U \cap A) \}$

Si $s \in \mathrm{Im}\,\varphi$, $\quad |s| \doteq \{ x \in U \cap A \ /\ s(x) \neq 0 \}$ est fermé dans U (et non seulement de $U \cap A$) car $U \cap A$ est choisi fermé dans U.

$|s|$ désigne ici le support de s. (cf * page 30)

Montrons que :

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \{ s \in \mathcal{L}(U \cap A) \ /\ |s| \text{ fermé dans } U \}$$

Pour cela, vérifions que si $s \in \mathcal{L}(U \cap A)$ est de support $|s|$ fermé dans U, alors $s \in \mathrm{Im}\,\varphi$, ie $\begin{cases} s \text{ sur } U \cap A \\ 0 \text{ sur } U \setminus (U \cap A) \end{cases}$ définit une section continue de $\mathcal{L}^X$ sur U.

Si $x \in A \cap U$ $s(x) \in \mathcal{L}_x$ $\exists$ section $\tilde{s}$ de $\mathcal{L}^X$ sur un voisinage V de x $\tilde{s} \in \mathcal{L}^X(V)$ telle que $\tilde{s}(x) = s(x)$ (puisque $\mathcal{L}^X$ est supposé exister).
Quitte à diminuer V, on aura $\tilde{s}|_{V\cap A} = s|_{V\cap A}$ d'après (1) et $\tilde{s} = 0$ en dehors de $V \cap A$ d'après (2).
Soit $\begin{cases} \tilde{o} \in \mathcal{L}^X(U \setminus U\cap A) \text{ la section nulle sur l'ouvert } U \setminus (U\cap A) \\ \tilde{s} \in \mathcal{L}^X(V) \text{ où } V \text{ parcourt 1 recouvrement d'ouverts de } U\cap A \end{cases}$
(*) Il est clair que ces sections se recollent en une section $\tilde{s} \in \mathcal{L}^X(U)$ telle que $\varphi(\tilde{s}) = s$, d'où l'expression de $\operatorname{Im}\varphi$.

Conclusion : Si $\mathcal{L}^X$ existe, $\mathcal{L}^X(U) = \{ s \in \mathcal{L}(U\cap A) \,/\, |s| \text{ fermé dans } U \}$

* Existence : Posons pour tout $U \Subset X$, $U \neq \emptyset$,

$$\mathcal{L}^X(U) = \{ s \in \mathcal{L}(U\cap A) \,/\, |s| \text{ fermé dans } U \}$$

et $\mathcal{L}^X(\emptyset) = 0$.

Montrons que $\mathcal{L}^X$ est un faisceau de groupes abéliens vérifiant (1) et (2).
$\mathcal{L}^X$ est clairement un préfaisceau de groupes abéliens pour les restrictions :
$V \subset U$ $\mathcal{L}(U\cap A) \longrightarrow \mathcal{L}(V\cap A)$
$s \longmapsto s|_V$ $|s|_V| = V \cap |s|$ = fermé dans V car $|s|$ est fermé dans U et $V \subset U$.

Recollement : Si $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $s_\alpha \in \mathcal{L}^X(U_\alpha)$ / $s_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = s_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$, $s_\alpha \in \mathcal{L}(U_\alpha \cap A)$ coïncident sur les intersections, et comme $\mathcal{L}$ est un faisceau sur A les s_α se recollent en une unique section $s \in \mathcal{L}(U\cap A)$.
De plus $|s|$ est fermé dans U puisque

$$|s| = \bigcup_\alpha \{ x \in A\cap U \,/\, s_\alpha(x) \neq 0 \} = \bigcup_\alpha |s_\alpha|$$

est encore un fermé bien que réunion infinie de fermés. En effet, si $x \notin |s|$ $\forall \alpha$ $s_\alpha(x) = 0 \Rightarrow s_1(x) = 0 \Rightarrow s_1$ est la section nulle sur un voisinage V_1 de x (cf. la section nulle d'un faisceau est bien continue). Par suite $s_\alpha(y) = 0$ pour tout $y \in V_1$ puisque les s_α coïncident sur les intersections. Donc $V_1 \subset \complement_U |s|$.

Il reste à vérifier (1) et (2).

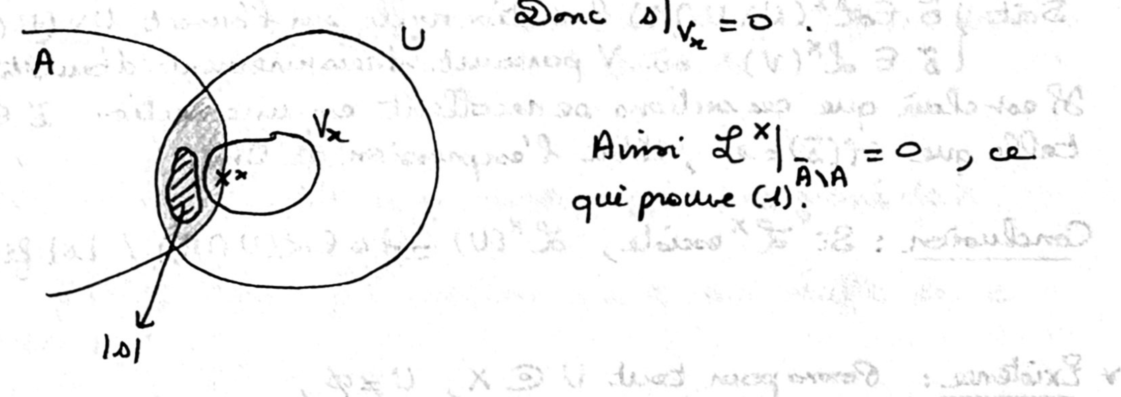
(1) $\mathcal{L}^X|_{X\setminus A} = 0$

Si $x \in X \setminus \bar{A}$ alors $\mathcal{L}^X_x = 0$. En effet, $s_x \in \mathcal{L}^X_x$ provient d'une section $s \in \mathcal{L}^X(V_x)$ où V_x est un voisinage de x que l'on peut choisir inclus dans $X \setminus \bar{A}$, de sorte que $V_x \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow \mathcal{L}^X(V_x) = \mathcal{L}(V_x \cap A) = 0$ car $V_x \cap A = \emptyset$ et $\mathcal{L}(\emptyset) = 0$.

Ainsi $\mathcal{L}^X|_{X \setminus \bar{A}} = 0$.

Prenons maintenant $x \in \bar{A} \setminus A$, U un voisinage ouvert de x dans X et $s \in \mathcal{L}^X(U)$. Alors $s \in \mathcal{L}(U \cap A)$ est de support $|s|$ fermé dans U, et $|s| \subset A$. Donc $x \notin |s|$ (car $|s| \subset A$) et comme $|s|$ fermé dans U, il existe un voisinage V_x ouvert de x disjoint de $|s|$ dans U.

Donc $s|_{V_x} = 0$.



Ainsi $\mathcal{L}^X|_{\bar{A} \setminus A} = 0$, ce qui prouve (1).

(2) <u>$\mathcal{L}^X|_A \simeq \mathcal{L}$</u>

$\forall x \in A$ $\exists U$ vois. ouv. de x / $A \cap U$ fermé dans U (cf A loc. fermé)
Ainsi, $\forall V \Subset U$ V vois. ouv. de x $\mathcal{L}^X(V) = \mathcal{L}(V \cap A)$ (puisque $|s|$ fermé dans $V \Rightarrow |s|$ fermé dans $V \cap A$ dans ce cas)
En passant à la limite inductive, on obtient

$$\mathcal{L}^X_x \simeq \mathcal{L}_x \quad \forall x \in A$$

Il reste à vérifier que l'identification $\mathcal{L}^X|_A \simeq \mathcal{L}$ respecte les topologies des 2 faisceaux, ou encore que les sections au dessus de $U \cap A$ du faisceau $\mathcal{L}^X|_A$ sont aussi celles de $\mathcal{L}$.
Posons $\mathcal{M} = \mathcal{L}^X|_A$. Alors $\mathcal{M}(U \cap A) \simeq \mathcal{L}(U \cap A)$ puisque toutes les sections de $\mathcal{M}$ au dessus de $U \cap A$ prolongées par 0 dans $U \setminus U \cap A$ sont continues (cf $A \cap U$ fermé de U + même argument que ($\underline{*}$))

CQFD

---

* (<u>Parenthèse</u> :) Si $\mathcal{L}$ est un faisceau de groupes abéliens sur X et si s est une <u>section de $\mathcal{L}$ au dessus d'une partie U de X</u>, on appelle <u>support de s</u>, et l'on note $|s|$, l'ensemble $|s| = \{x \in U \,/\, s(x) \neq 0\}$.
On rappelle (cf. cours sur les faisceaux) que <u>la section nulle $\tilde{O}$ de $\mathcal{L}$</u> (définie par $\tilde{O} : X \longrightarrow \mathcal{L}$, $x \longmapsto O_x$) est 1) bien une section globale de $\mathcal{L}$, <u>continue</u> 2) définit un ouvert de $\mathcal{L}$ appelé encore "section nulle" (à savoir $\{O_x / x \in X\}$ où O_x sont les zéros des groupes $\mathcal{L}_x$)
Le 1) montre qu'une section nulle en un point est nécessairement nulle au voisinage de ce point, de sorte que le <u>support $|s|$ de s soit un fermé de U</u>.
En effet, si $x \notin |s|$ on a $s(x) = 0$ donc $s = \tilde{O}$ sur un voisinage V de x, ~~Alors~~ $V \subset U$, donc $V \subset U \setminus |s|$
et finalement $U \setminus |s|$ est un ouvert.

O_x
x $s(x)$ } la section est la section nulle
s
$|s|$ x V
U

Du théorème 7.2, on déduit :

Théorème 7.3 : Soit A un sous-espace de X. Les 2 propriétés suivantes sont équivalentes :

(LF1) A localement fermé

(LF2) $\forall \mathcal{L}$ faisceau de groupes abéliens sur X $\exists! \mathcal{L}_A$ faisceau de groupes abéliens sur X tel que

(1) $\mathcal{L}_A|_A \simeq \mathcal{L}|_A$

(2) $\mathcal{L}_A|_{X \setminus A} \simeq 0$

preuve :

(LF2) $\Rightarrow$ (LF1) Soit $\mathcal{L} = \mathbb{Z}$ = faisceau constant sur X.

On obtient ainsi un faisceau $\mathcal{L}_A$ tel que

$$\begin{cases} \mathcal{L}_A|_A = \mathbb{Z}|_A \\ \mathcal{L}_A|_{X\setminus A} \simeq 0 \end{cases}$$

$\forall a \in A$ $\exists s$ section de $\mathcal{L}_A$ $s \in \mathcal{L}_A(U)$ où U voisin de a / $s(a) = 1$.

Une telle section vaut toujours 1 sur un voisinage de a (en effet, $s|_{U\cap A}$ s'identifie à une section de $\mathbb{Z}|_A$ qui vaut 1 en a, et l'on sait qu'une section d'un faisceau constant G sur X n'est autre qu'une application localement constante de X dans G), plus précisemment sur $U \cap A$ si U est choisi assez petit.

Ainsi :

$$\begin{cases} s = 0 & \text{sur } U \setminus A \\ s = 1 & \text{sur } U \cap A \end{cases}$$

donc :

$U \setminus U\cap A = \{x \in U \,/\, s(x) = 0\}$ = ouvert de U (cf $|s|$ fermé dans U montré à $*$ page 30 $\Leftarrow$ toute section s s'annulant en un point x de U s'annule également sur un voisinage de x, ie coïncide avec la section nulle)

Ainsi $U \cap A$ est fermé dans U $\Rightarrow$ A est localement fermé.

(LF1) $\Rightarrow$ (LF2) Si A est localement fermé, on prolonge le faisceau restreint $\mathcal{L}|_A$ par 0 grâce au théorème 7.2 pour obtenir $(\mathcal{L}|_A)^X$.

On pose :

$$\mathcal{L}_A \doteq (\mathcal{L}|_A)^X$$

L'unicité provient de celle du Th. 7.2.

CQFD

Proposition 7.4 : Si A est ouvert et si $\mathcal{L}$ est un faisceau sur X, alors $\mathcal{L}_A$ est un sous-faisceau de $\mathcal{L}$.

preuve : Prenons le point de vue des espaces étalés.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_A & \hookrightarrow & \mathcal{L} \\ & \pi \searrow \quad \swarrow \pi & \\ & X & \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \dot{\bigcup_{x \in X}} \mathcal{L}_x$$

$$\mathcal{L}_A = \dot{\bigcup_{x \in A}} \mathcal{L}_{A,x} \quad \text{où} \quad \mathcal{L}_{A,x} = \begin{cases} \mathcal{L}_x \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On munit $\mathcal{L}_A$ de la topologie induite par $\mathcal{L}$. Il suffit de vérifier que $\pi : \mathcal{L}_A \to X$ est un faisceau, ie π est encore un homéomorphisme local.

Soit $l \in \mathcal{L}_A$ et $\pi(l) = x$.

1) Si $x \in A$, $\exists V$ voisinage de x $V \subset A$ $\exists W$ vois. de $l \subset \mathcal{L}$ / $\pi : W \to V$ homéomorphisme. Alors $V \subset A \Rightarrow W \subset \mathcal{L}_A$.

2) Si $x \notin A$, $l = 0_x \in \mathcal{L}_x$ et la section nulle est un ouvert de $\mathcal{L}$ contenant $l = 0_x$, de sorte que l'on puisse trouver un ouvert Ω inclus dans W, $0_x \in W$, tel que

$$\pi : \Omega \longrightarrow V \doteq \pi(\Omega) \text{ soit un homéomorphisme.}$$

Alors : $\pi : \Omega = \Omega \cap \mathcal{L}_A \longrightarrow V$ est aussi un homéomorphisme.

CQFD

<u>Si B est fermé, la prop. 7.4 est fausse</u>. Posons $A = X \setminus B$, et considérons la suite exacte de faisceaux :

$$\mathcal{L}_A \hookrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}/\mathcal{L}_A \longrightarrow 0$$

$$\begin{cases} x \in A \Rightarrow \left(\mathcal{L}/\mathcal{L}_A\right)_x \simeq \mathcal{L}_x/\mathcal{L}_{A,x} \simeq 0 \\ x \notin A \Rightarrow \left(\mathcal{L}/\mathcal{L}_A\right)_x \simeq \mathcal{L}_x \end{cases}$$

Fibre à fibre, le faisceau $\mathcal{L}/\mathcal{L}_A$ ressemble à $\mathcal{L}_B$.

$\mathcal{L}_B(U) = \{ s \in \mathcal{L}|_B(U\cap B) \ / \ |s| \text{ fermé dans } U \}$

(1) $\mathcal{L}_B(U) = \mathcal{L}|_B(U\cap B)$ (car $|s|$ fermé dans $U\cap B$ et B fermé $\Rightarrow$ $|s|$ fermé dans U)

On en déduit un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_B$, à savoir :

$$\varphi(U) : \quad \mathcal{L}(U) \longrightarrow \mathcal{L}_B(U)$$
$$s \longmapsto s|_{U\cap B}$$

* <u>φ est surjectif</u> : on le montre fibre à fibre. Si $x \in B$, en passant à la limite inductive dans (1), on obtient $(\mathcal{L}_B)_x = (\mathcal{L}|_B)_x$. Si $x \notin B$, $(\mathcal{L}_B)_x = 0_x$ donc φ_x est trivialement surjective (l'antécédent est le germe nul)

* <u>Ker φ ?</u> $\quad \operatorname{Ker}\varphi(U) = \{ s \in \mathcal{L}(U) \ / \ s|_{U\cap B} = 0 \}$

Montrons que $\operatorname{Ker}\varphi(U) = \mathcal{L}_A(U)$ où $\mathcal{L}_A(U) = \{ s \in \mathcal{L}|_A(U\cap A) \ / \ |s| \text{ fermé de } U \}$
Si $s \in \operatorname{Ker}\varphi(U)$, $|s| \subset U \setminus (U\cap B) \Rightarrow |s| \subset A\cap U$ donc $s \in \mathcal{L}|_A(U\cap A)$ et $|s|$ est fermé dans U (car $s \in \mathcal{L}(U)$).
Réciproquement, si $s \in \mathcal{L}_A(U)$ (sous entendu, $s \in \mathcal{L}|_A(U\cap A)$ est prolongé sur U par 0) alors $s \in \mathcal{L}(U)$ et clairement $s|_{U\cap B} = 0$.

Finalement, nous avons la suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_A \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}_B \longrightarrow 0$$

On vient de montrer que :

<u>Théorème 7.5</u> : Si A est un fermé de X, on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{X\setminus A} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_A \longrightarrow 0$$

<u>Corollaire 7.6</u> : Si A est localement fermé, $A = U \cap F$ où U ouvert et F fermé, et on a les suites exactes.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_A \longrightarrow \mathcal{L}_F \longrightarrow (\mathcal{L}_F)_{X\setminus U} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (\mathcal{L}_U)_{X\setminus F} \longrightarrow \mathcal{L}_U \longrightarrow \mathcal{L}_A \longrightarrow 0$$

preuve : Si A et B sont localement fermés dans X, on a

$$\boxed{(\mathcal{L}_A)_B = \mathcal{L}_{A\cap B} \qquad (1)}$$

En effet, par définition $\begin{cases} (\mathcal{L}_A)_B|_B \simeq \mathcal{L}_A|_B & (2) \\ (\mathcal{L}_A)_B|_{X\setminus B} \simeq 0 & (3) \end{cases}$ où $\begin{cases} \mathcal{L}_A|_A \simeq \mathcal{L}|_A \\ \mathcal{L}_A|_{X\setminus A} \simeq 0 \end{cases}$

(2) donne :

$*\alpha)$ $\mathcal{L}_A|_B|_{A\cap B} \simeq (\mathcal{L}_A|_B)|_{A\cap B} \simeq \mathcal{L}_A|_{A\cap B} \simeq \mathcal{L}|_{A\cap B}$ en utilisant 2 fois la propriété (R) :

(R) : Fonctorialité de l'image réciproque $g^{-1}(f^{-1}\mathcal{F})$ $\quad f^{-1}\mathcal{F} \quad \mathcal{F}$

$g^{-1}\circ f^{-1} = (f\circ g)^{-1}$ $\qquad A\cap B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} X$

ie $(\mathcal{F}|_A)|_{A\cap B} \simeq \mathcal{F}|_{A\cap B}$, en particulier. (on peut le montrer directement en partant de la définition du faisceau restreint $\mathcal{F}|_A$ qui ne fait pas intervenir les images réciproques $f^{-1}(\mathcal{F})$.)

$*\beta)$ $(\mathcal{L}_A)_B = 0$ en dehors de $A\cap B$ car :

↗ si $x \notin B$ $\quad (\mathcal{L}_A)_{B,x} = 0$ d'après (3)

↘ si $x \in B$ $\quad (\mathcal{L}_A)_{B,x} \simeq \mathcal{L}_A|_{B,x} = 0$ car $x \notin A$

$\alpha)$ et $\beta)$ montrent que $(\mathcal{L}_A)_B = \mathcal{L}_{A\cap B}$ (1).

Cela étant, il est facile de montrer le corollaire 7.6 puisque tout localement fermé A s'écrit $A = U\cap F$ où U ouvert et F fermé, puisque U et F sont localement fermés et donc :

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{U\cap F} = (\mathcal{L}_U)_F = (\mathcal{L}_F)_U$$

Le Th 7.5 donne les 2 suites exactes :

$$0 \longrightarrow (\mathcal{L}_F)_U \longrightarrow \mathcal{L}_F \longrightarrow (\mathcal{L}_F)_{X\setminus U} \longrightarrow 0$$

et $$0 \longrightarrow (\mathcal{L}_U)_{X\setminus F} \longrightarrow \mathcal{L}_U \longrightarrow (\mathcal{L}_U)_F \longrightarrow 0$$

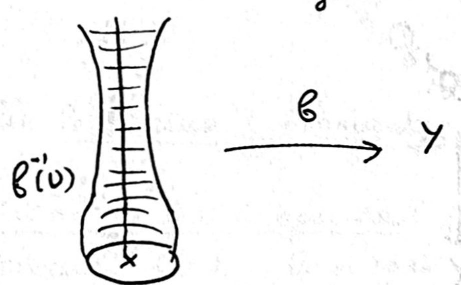
8. Image directe d'un faisceau.

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de base X et $f : X \to Y$ une application continue. La correspondance $U \rightsquigarrow f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ définit un faisceau sur Y (ie un préfaisceau complet) qui s'appelle l'image directe de $\mathcal{F}$ par f.

$$\begin{array}{c} \mathcal{F} \\ \downarrow \\ X \xrightarrow[\text{continue}]{f} Y \end{array}$$

La fibre de $f_*(\mathcal{F})$ au dessus de $y \in Y$ est :

$$f_*(\mathcal{F})_y = \varinjlim_{y \in U} \mathcal{F}(f^{-1}(U)) = \text{" objet global "}.$$



<u>Proposition 8.1</u> : Si f est une application fermée (par exemple, si f est propre) et si $\mathcal{F}$ est un faisceau de base X, on a :

$$(f_*\mathcal{F})_y = \varinjlim_{f^{-1}(y) \subset V \in X} \mathcal{F}(V)$$

preuve :

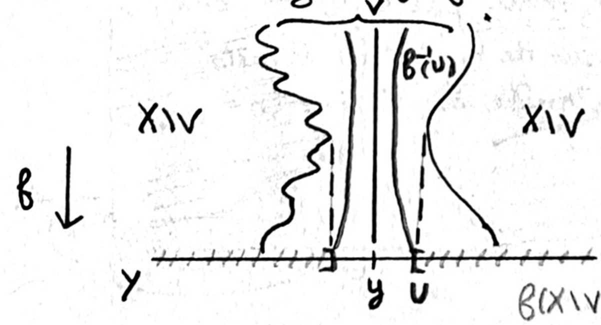
$$(f_*\mathcal{F})_y \doteq \varinjlim_{y \in U} \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \varinjlim_{f^{-1}(y) \subset V} \mathcal{F}(V)$$

$$\dot{s} \longmapsto \dot{s} \qquad (\text{où } s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)))$$

$\mathfrak{F}$ sera bijective si l'on arrive à montrer que :

(*) $\forall V$ voisinage de $f^{-1}(y)$ dans X $\exists U$ voisinage de y dans Y / $f^{-1}(U) \subset V$

(l'injectivité est triviale, et la surjectivité provient de (*))



Il suffit de prendre $U = Y \setminus f(X \setminus V)$:

1) $f^{-1}(U) \subset V$ car $f^{-1}(Y \setminus f(X\setminus V)) = X \setminus f^{-1}f(X\setminus V) \subset X \setminus (X \setminus V) \subset V$

2) $y \in U$, sinon il existe $x \in X \setminus V$ tel que $f(x) = y$, ce qui est absurde car V est un voisinage ouvert de $f^{-1}(y)$, donc de x.

3) $U = Y \setminus f(X \setminus V)$ est ouvert dans Y car f est fermée. CQFD

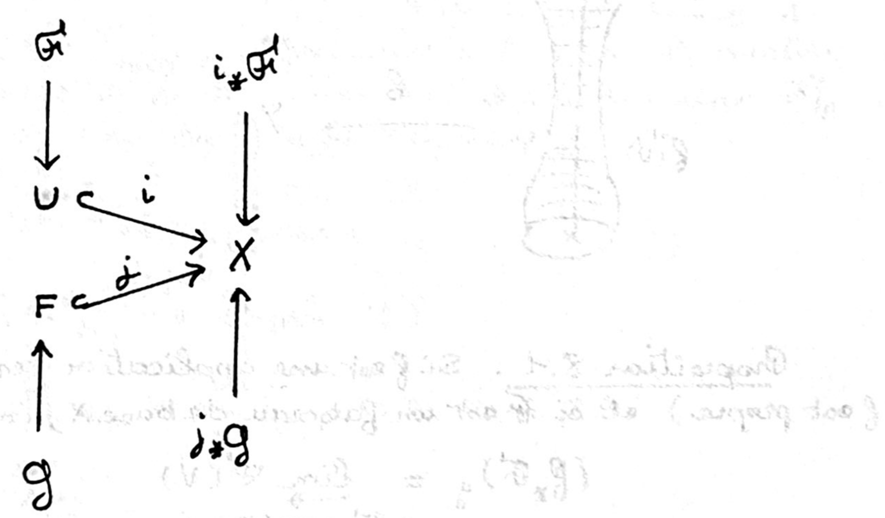
8.1.1 Corollaire : Si $f : X \longrightarrow Y$ est fermée et X paracompact, pour tout faisceau F de base X on a :

$$(f_* F)_t = F(f^{-1}(t))$$

[En effet, f fermée $\Rightarrow (f_* F)_t = \varinjlim_{f^{-1}(t) \subset V} F(V)$ et X paracompact implique $\varinjlim_{f^{-1}(t) \subset V} F(V) = F(f^{-1}(t))$ (6.4 p25)]

8.2 Remarque

Soient U (resp. F) un ouvert (resp. un fermé) de X, $i : U \hookrightarrow X$ et $j : F \hookrightarrow X$ les inclusions canoniques, $\mathcal{F}$ un faisceau de base U et $\mathcal{G}$ un faisceau de base F.



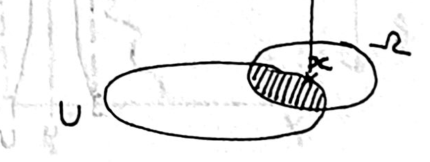
Si Ω est un ouvert de X, on a $\begin{cases} i_*\mathcal{F}(\Omega) = \mathcal{F}(\Omega \cap U) \\ j_*\mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{G}(\Omega \cap F) \end{cases}$

$j_*\mathcal{G} = \mathcal{G}^X$ = prolongé par 0 du faisceau $\mathcal{G}$ (cf 7.2) puisque l'on a :

$$j_*\mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{G}(\Omega \cap F) = \{ s \in \mathcal{G}(\Omega \cap F) \ / \ |s| \text{ fermé dans } \Omega \}$$

En effet, $|s|$ fermé dans $\Omega \cap F$ et F fermé $\Rightarrow$ $|s|$ fermé dans Ω

Attention ! $i_*\mathcal{F}$ n'est pas le prolongement par 0 de $\mathcal{F}$, car si $x \in \bar{U} \setminus U$, la fibre de $i_*(\mathcal{F})$ au dessus de x est la limite inductive des $\mathcal{F}(U \cap \Omega)$, et n'est pas nulle à priori.



Proposition 8.3 : Si $f : X \to Y$ est continue, la correspondance $\mathcal{F} \rightsquigarrow f_*\mathcal{F}$ définit un <u>foncteur exact à gauche</u> de la catégorie des faisceaux sur X dans la catégorie des faisceaux sur Y.

preuve :
Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux de base X, on définit $f_*\varphi : f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$ en posant

$$(f_*\varphi)(U) = \varphi(f^{-1}(U)) : f_*\mathcal{F}(U) \doteq \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \longrightarrow f_*\mathcal{G}(U) \doteq \mathcal{G}(f^{-1}(U))$$

pour tout ouvert U de Y.

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{F} & & f_*\mathcal{F} & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \varphi & X & \xrightarrow{f} & Y & f_*\varphi \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \mathcal{G} & & f_*\mathcal{G} & \end{array}$$

f_* s'appelle <u>le foncteur (covariant) image directe</u>.

<u>Montrons qu'il est exact à gauche</u> : Soit $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ une suite exacte de faisceaux sur X. Pour tout ouvert U de Y, la suite

$$0 \to \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \xrightarrow{\varphi(f^{-1}(U))} \mathcal{G}(f^{-1}(U)) \xrightarrow{\psi(f^{-1}(U))} \mathcal{H}(f^{-1}(U))$$

est exacte, puisque le <u>foncteur section sur l'ouvert $f^{-1}(U)$ est exact à gauche</u>. En passant à la limite inductive, et compte tenu du fait que le foncteur limite inductive est exact, on obtient la suite exacte :

$$0 \to (f_*\mathcal{F})_y \xrightarrow{(f_*\varphi)_y} (f_*\mathcal{G})_y \xrightarrow{(f_*\psi)_y} (f_*\mathcal{H})_y \qquad (\text{où } y \in Y)$$

La prop. 4.4.1 montre qu'alors la suite :

$$0 \to f_*\mathcal{F} \xrightarrow{f_*\varphi} f_*\mathcal{G} \xrightarrow{f_*\psi} f_*\mathcal{H}$$ est une suite exacte de faisceaux.

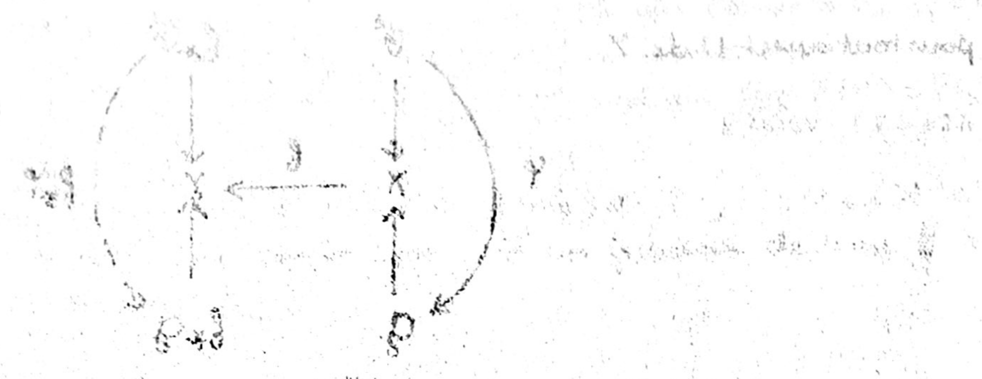
CQFD

Proposition 8.4 : Soit A localement fermé dans X. Avec les notations de la section 7, on a :

(1) La correspondance $\mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{L}_A$ définit un foncteur exact de la catégorie des faisceaux de base X dans elle-même.

(2) La correspondance $\mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{L}^X$ définit un foncteur exact de la catégorie des faisceaux de base A dans celle des faisceaux de base X.

preuve :



9. Comorphismes

Proposition 9.1 : Soient E (resp. F) un faisceau de base X (resp. Y) et $f: X \to Y$ continue.
Alors :

$$\boxed{\mathrm{Hom}(f^{-1}F, E) = \mathrm{Hom}(F, f_* E)}$$

preuve :

$$\begin{array}{ccc} E & & F \\ \downarrow & \overset{\alpha}{\nearrow} & \downarrow \uparrow \beta^x \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

①

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}F, E) \xrightarrow{\Xi} \mathrm{Hom}(F, f_* E)$$
$$\varphi = \{\varphi(U)\}_U \longmapsto \psi = \{\psi(V)\}_V$$

où si $V \Subset Y$ $\quad \psi(V) : F(V) \longrightarrow f_*E(V) = E(f^{-1}(V))$
$$s \longmapsto \psi(V)s = \varphi(f^{-1}(V))(s \circ f)$$

où $\varphi(U) : f^{-1}F(U) \longrightarrow E(U)$ et $s\circ f \in f^{-1}F(U)$.

②

$$\mathrm{Hom}(F, f_* E) \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{Hom}(f^{-1}F, E)$$
$$\psi = \{\psi(V)\}_V \longmapsto \varphi = \{\varphi(U)\}_U$$

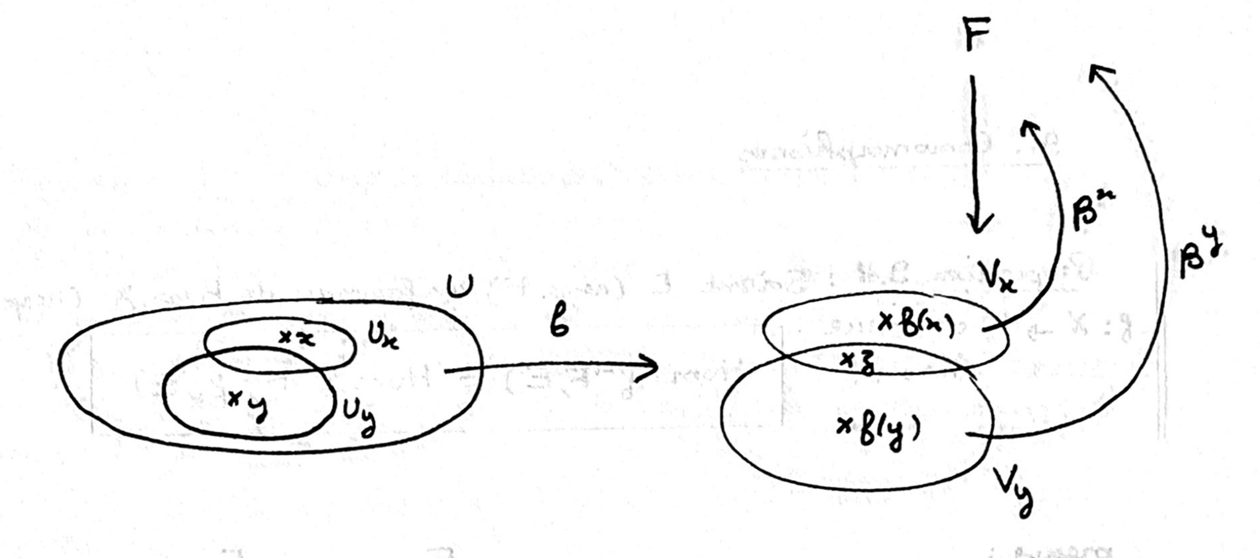
où, si $U \Subset X$ $\quad \varphi(U) : f^{-1}F(U) \longrightarrow E(U)$ et où γ est définie
$$\alpha \longmapsto \gamma$$

ainsi :
$\forall x \in U$ $\quad \exists V_x$ voisinage ouvert de $f(x)$ dans Y
$\exists U_x$ voisinage ouvert de x dans X / $f(U_x) \subset V_x$
$\exists \beta^x \in F(V_x)$ / $\alpha|_{U_x} = (\beta^x \circ f)|_{U_x}$ (1)
où $\beta^x \circ f \in f^{-1}F(f^{-1}(V_x))$.

On pose alors $\gamma^x = \psi(V_x).\beta^x \in E(f^{-1}(V_x))$ (2)

de sorte que $\gamma^x|_{U_x} \in E(U_x)$ (3)

Affirmation : toutes les sections (3) se recollent en une section γ sur U
ie $\forall x, y \in U$ $\quad \gamma^x|_{U_{xy}} = \gamma^y|_{U_{xy}}$ où $U_{xy} \doteqdot U_x \cap U_y$.



(1) $\Rightarrow$ $\beta^x = \beta^y$ sur $f(U_x \cap U_y)$ car α est une section globale sur U.
Donc $\forall z \in f(U_x \cap U_y)$ $\quad (\gamma^x)_z = \varinjlim \Psi(V_x).\beta^x = \Psi_z.(\beta^x)_z$
$= \varinjlim \Psi(V_y).\beta^y = \Psi_z(\beta^y)_z$ $\Big\} \Rightarrow (\gamma^x)_z = (\gamma^y)_z$

(Ψ est un morphisme de faisceaux).
Ainsi $\gamma^x|_{U_{xy}} = \gamma^y|_{U_{xy}}$.

③ <u>Ces 2 applications $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{S}$ sont inverses l'une de l'autre</u> :

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}F, E) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \mathrm{Hom}(F, f_*E) \xrightarrow{\mathfrak{S}} \mathrm{Hom}(f^{-1}F, E)$$
$$\varphi \longmapsto \Psi = \mathfrak{F}(\varphi) \longmapsto \tilde{\varphi} = \mathfrak{S}\circ\mathfrak{F}(\varphi)$$

Par construction, Ψ est défini par :
$\forall V \Subset Y \quad \forall s \in F(V) \quad \Psi(V)(s) = \varphi(f^{-1}(V))(s \circ f)$
Par construction de l'image $\tilde{\varphi}$ de Ψ par $\mathfrak{S}$, on a :

$\forall \alpha \in f^{-1}F(U) \qquad \alpha|_{U_x} = (\beta^x \circ f)|_{U_x}$
$\gamma^x = \Psi(V_x)\,\beta^x = \varphi(f^{-1}(V_x))(\beta^x \circ f)$

d'où :
$$\gamma^x|_{U_x} = \varphi(f^{-1}(V_x))(\beta^x \circ f)\Big|_{U_x} \overset{(*)}{=} \varphi(U_x)\big((\beta^x \circ f)|_{U_x}\big)$$
$$= \varphi(U_x)(\alpha|_{U_x}) \text{ d'après (1)}$$

D'où, par recollement, $\gamma = \varphi(U)(\alpha)$, et par définition $\gamma = \tilde{\varphi}(U) = \alpha$
d'où $\tilde{\varphi} = \varphi$, ie $\mathfrak{S}\circ\mathfrak{F} = id$.

((*) C'est la commutativité du diagramme $E(U) \xrightarrow{\varphi(U)} F(U)$ où ρ_{VU} et ρ'_{VU} sont les morphismes restriction, et où $\varphi : E \to F$ est un $\rho_{VU}\downarrow \quad \downarrow \rho'_{VU}$ morphisme de faisceaux, qui donne $\forall s \in E(U)$ $[\varphi(U)(s)]|_{F(V)} = \varphi(V)(s|_V)$ $\quad E(V) \xrightarrow{\varphi(V)} F(V)$.)

Il reste encore à montrer que $\Xi \circ \Sigma = id$:

$$\begin{array}{ccccc} Hom(F, f_* E) & \xrightarrow{\Sigma} & Hom(f^{-1}F, E) & \xrightarrow{\Xi} & Hom(F, f_* E) \\ \psi & \longmapsto & \varphi & \longmapsto & \tilde{\psi} \doteq \Xi(\varphi) \end{array}$$

Si $V \subset Y$, on a par constuction de Ξ :

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\psi}(V) : & F(V) & \longrightarrow & E(f^{-1}(V)) \\ & s & \longmapsto & \varphi(f^{-1}(V))(s \circ f) \end{array}$$

La construction ② donne alors, dans le cas où $s \circ f = \alpha \in f^{-1}F(U)$, $V_x = V$ et $U_x = f^{-1}(V)$, $\beta^x = s$, l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(V)(s) = \varphi(f^{-1}(V))(s \circ f) &= \psi(V_x).\beta^x \qquad \text{(cf (2))} \\ &= \psi(V).(s) \end{aligned}$$

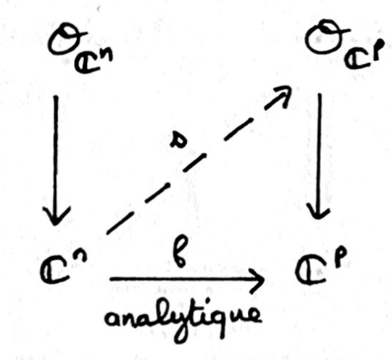
d'où $\tilde{\psi} = \psi$ et $\Xi \circ \Sigma = id$.

CQFD

Définition 9.2 : Soient E (resp. F) un faisceau de base X (resp. Y) et $f : X \to Y$ continue. <u>Un f-comorphisme (de F dans E)</u> est un élément de $Hom(F, f_* E) = Hom(f^{-1}F, E)$

$$\begin{array}{ccccc} E & & F & \longrightarrow & f_* E \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & & \end{array}$$

<u>Exemple fondamental 9.3 : Comorphisme canonique</u>



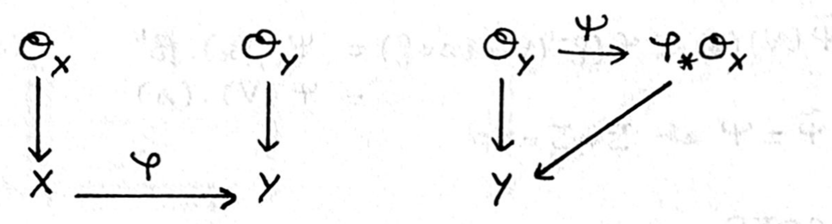
Dans ce cas de figure, on a le comorphisme évident :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p} & \longrightarrow & f_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \\ h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}(U) & \longmapsto & h \circ f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(f^{-1}(U)) \end{array}$$

Vu sous le point de vue $Hom(f^{-1}F, E)$, on obtient (grâce à 9.1) le fait qu'une section $s \in f^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p})$ définit globalement une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}$ qui fasse commuter le diagramme. (cf ② Prop. 9.1)

Définition 9.4 : Un *espace annelé* est la donnée
* d'un espace topologique X
* d'un faisceau d'anneaux, appelé *faisceau structural* de l'espace annelé, et noté $\mathcal{O}_X$.

X s'appelle la base, ou encore l'*espace topologique sous-jacent* à l'espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$.
On notera X-*module* au lieu de $\mathcal{O}_X$-*module*.
Un morphisme d'espaces annelés est un couple $f = (\varphi, \psi) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ où $\varphi : X \rightarrow Y$ est une application continue et où ψ est un φ-comorphisme.
L'application φ s'appelle l'*application sous-jacente* à f, et on notera parfois $\varphi = \{f\}$ et $\psi = f^*$. On fait parfois l'abus $\varphi = f$.



$$\psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y, \varphi_* \mathcal{O}_X) = \mathrm{Hom}(\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$$

Nous supposerons toujours, dans la suite, que $\mathcal{O}_X$ est un faisceaux d'*anneaux unitaires* sur X.
On notera que :

$$\psi_x : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

En effet, $\psi \in \mathrm{Hom}(\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X)$ et $(\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y))_x = \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$ (cf NB du 5.2)

10. Foncteurs f^* et f_*

Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés. On définit le foncteur f^* de la catégorie des Y-modules dans la catégorie des X-modules de la façon suivante :

Soit $\underline{F}$ un Y-module. Alors $f^{-1}\underline{F}$ est un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-module d'après 5.5. D'autre part, $\varphi \in \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$ permet de structurer $\mathcal{O}_X$ en $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-module, de sorte que l'on puisse poser :

$$\boxed{f^*\underline{F} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\underline{F}}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_X & f^{-1}\underline{F} & & \mathcal{O}_Y & \underline{F} \\ \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \end{array}$$

$f^*\underline{F}$ est ainsi un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-module qui hérite de la structure de X-module de $\mathcal{O}_X$. (*)

On a, immédiatement :

1) $\forall x \in X \quad y = f(x) \quad (f^*\underline{F})_x = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \underline{F}_y$

2) $f^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$

Le 1) provient de 4.1 et de $(f^{-1}\underline{F})_x = \underline{F}_y$ (cf NB du 5.2). Le 2) se vérifie directement :

$$f^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$$

10.1 Proposition : Le foncteur f^* est exact à droite.

En effet, si $M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_Y$-module, on applique successivement

1) le foncteur f^{-1} qui est exact
2) le foncteur $\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}$ qui est exact à droite

pour obtenir f^*.

CQFD

(*) Si M et N sont 2 A-modules et si M est un anneau, $M \otimes_A N$ est certes un A-module, mais il hérite d'une structure de M-module par la multiplication $\lambda(m \otimes n) = (\lambda m) \otimes n$

10.2 Définitions

Soient X un espace annelé et $\underline{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module.

(1) On dit que $\underline{E}$ est localement de type fini si pour tout point x de X il existe un voisinage U et un morphisme :

$$\mathcal{O}_X^p|_U \longrightarrow \underline{E}|_U \longrightarrow 0$$

(2) On dit que $\underline{E}$ est localement de présentation finie si pour tout point x de X il existe un voisinage ouvert U et des morphismes :

$$\mathcal{O}_X^n|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X^p|_U \longrightarrow \underline{E}|_U \longrightarrow 0$$

(3) $\underline{E}$ est dit localement libre si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que $\mathcal{O}_X^p|_U \simeq \underline{E}|_U$.

Rappel : Un morphisme de faisceau $\varphi : \underline{F} \to \underline{G}$ est injectif (resp. surjectif) si (par définition) $\varphi_x : \underline{F}_x \to \underline{G}_x$ est injectif (resp. surjectif) pour tout $x \in X$. Si $\varphi : \underline{F} \to \underline{G}$ est injectif, alors $\varphi(U) : \underline{F}(U) \to \underline{G}(U)$ est injectif pour tout ouvert U de X. Mais attention ! $\varphi : \underline{F} \to \underline{G}$ surjectif n'implique pas que $\varphi(U) : \underline{F}(U) \to \underline{G}(U)$ soit surjective. (cf cours sur les faisceaux)

10.3 Remarque importante

Soit $\underline{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module, où $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé. Alors $\underline{E}$ est localement de type fini ssi tout point de X possède un voisinage ouvert U tel que :

$$\exists\, s_1, \dots, s_p \in \underline{E}(U) \quad \forall x \in U \quad \forall s \in \underline{E}_x \quad s = \sum \lambda_i s_{i,x} \quad \text{où } \lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x}$$

preuve : Si $\underline{E}$ est localement de type fini, alors

$$\mathcal{O}_X^p|_U \xrightarrow{\mathfrak{F}} \underline{E}|_U \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

$\mathcal{O}_X$ est unitaire, donc on possède p sections globales $(1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)$ de $\mathcal{O}_X^p$. Notons

$$\begin{cases} s_1 = \mathfrak{F}(U)((1,0,\dots,0)) \\ \vdots \\ s_p = \mathfrak{F}(U)((0,\dots,1)) \end{cases} \text{, ie } \begin{cases} (1,0,\dots,0) \longmapsto s_1 \in \underline{E}(U) \\ \vdots \\ (0,\dots,0,1) \longmapsto s_p \in \underline{E}(U) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{F}$ surjectif $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{F}$ surjectif fibre à fibre (cf rappel du 10.2)
ie $\forall x \in U \quad \mathfrak{F}_x : (\mathcal{O}_X^p|_U)_x \longrightarrow \underline{E}_x$ est surjectif

Par suite

$$\forall x \in U \quad \forall s \in \underline{E}_x \quad \exists\, \lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x} \quad s = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i s_{i,x} \qquad (2)$$

Inversement, si (2) est vérifié, on définit le morphisme de faisceaux Ξ en posant $\Xi(U)\,(\underbrace{(0,\dots,1,\dots,0)}_{k^e\ \text{place}}) = s_k \in \underline{E}(U)$. Il est évident que Ξ_x est surjective, ie que l'on a (1).

CQFD

10.4 Proposition :

Les 3 définitions du 10.2 sont stable par f^*. Cela signifie que si $f : X \to Y$ est un morphisme d'espaces annelés et si $\underline{F}$ est un Y-module, alors :

$$\begin{cases} \underline{F} \text{ loc. de type fini} \Rightarrow f^*\underline{F} \text{ loc de type fini} \\ \underline{F} \text{ loc. de présentation finie} \Rightarrow f^*\underline{F} \text{ aussi} \\ \underline{F} \text{ loc. libre} \Rightarrow f^*\underline{F} \text{ aussi} \end{cases}$$

preuve :

Montrons seulement que $\underline{F}$ loc. de type fini $\Rightarrow f^*\underline{F}$ aussi.

* Si $\mathcal{O}_Y^p \to \underline{F} \to 0$, on a $f^*(\mathcal{O}_Y^p) \to f^*\underline{F} \to 0$ d'après 10.1, et

$$\begin{aligned} f^*(\mathcal{O}_Y^p) &= f^*(\mathcal{O}_Y \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_Y) \\ &= \mathcal{O}_X \otimes \varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X \otimes (\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y) \oplus \dots \oplus \varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y)) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{O}_X \otimes \varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X^p \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{O}_X^p \to f^*\underline{F} \to 0$ et $f^*\underline{F}$ est bien de type fini.

* Si $\mathcal{O}_Y^p|_U \to F|_U \to 0$, on montre que $\mathcal{O}_X^p|_{f^{-1}(U)} \to f^*(\underline{F})|_{f^{-1}(U)} \to 0$ en appliquant $\tilde{f}^{-1}$ et en tensorisant par $\otimes_{\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O}_Y|_U)}$, où l'on a posé : $f : f^{-1}(U) \to U$ et $i : U \hookrightarrow Y$.

Alors :

$$\mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)} \otimes_{\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O}_Y|_U)} \tilde{f}^{-1}\mathcal{O}_Y^p|_U \to \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U)} \otimes_{\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O}_Y|_U)} \tilde{f}^{-1}(\underline{F}|_U) \to 0$$

CQFD

10.5 Définition de f_* :

Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés. f_* est un foncteur de la catégorie des X-modules dans celle des Y-modules défini comme suit :
$f = (\varphi, \psi)$ où $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y, f_*\mathcal{O}_X)$. Si $\underline{F}$ est un X-module, $f_*\underline{F}$ est un $f_*\mathcal{O}_X$-module et le comomorphisme ψ structure $f_*\underline{F}$ en $\mathcal{O}_Y$-module.

f_* est un foncteur exact à gauche et admet des foncteurs dérivés non triviaux. On prendra garde que la proposition 10.4 est fausse avec f_*.

<u>Exemple</u> : Revenons au comonorphisme canonique 9.3, dans le cas particulier où :

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$$
$$x \longmapsto (x, 0)$$

Alors
$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \longrightarrow f_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$$
$$h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(U) \longmapsto h \circ f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(f^{-1}(U))$$

Comme f est fermé, la prop. 8.1 donne :

$$(f_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}})_{(x,y)} = \varinjlim_{f^{-1}(x,y) \subset V \Subset X} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(V) = \varinjlim_{x \in V \Subset X} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(V) = \mathcal{O}_{\mathbb{C},x}$$

Notons que $y \circ (f_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}})_{(x,y)} = 0$.

11. Support, Sous-espaces annelés, Annulateur

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\underline{F}$ un X-module. Si $s \in \underline{F}(U)$ est une section au dessus de l'ouvert U de X, on définit le support de s par :

$$|s| = \{x \in U \;/\; s_x \neq 0\}$$

$|s|$ est un fermé de U puisque si $s_x = 0$, s coïncide avec la section nulle au voisinage de x (cf (*) p 30 verso). $|s|$ est le complémentaire du plus grand ouvert V inclus dans U tel que $s|_V = 0$

L'ensemble $\{x \in X \;/\; \underline{F}_x \neq 0\}$ n'est pas fermé en général, puisque $\underline{F}_x = 0 \iff s_x = 0 \quad \forall s \in \underline{F}(U)$, ie $\{x \in X / \underline{F}_x = 0\} = \bigcup_{x \in X} \bigcap_{s \in F(U)} \{y \in U / s_y = 0\}$ et une réunion infinie d'ouverts n'est pas ouverte en général.
On définira donc le support du X-module $\underline{F}$ par :

$$|\underline{F}| = \overline{\{x \in X \;/\; \underline{F}_x \neq 0\}}$$

11.1 Proposition : Si $\underline{F}$ est un X-module localement de type fini, alors $|\underline{F}| = \{x \in X \;/\; \underline{F}_x \neq 0\}$

preuve : il faut montrer que $\{x \in X / \underline{F}_x = 0\}$ est ouvert dans X.
On a $\mathcal{O}_X^p|_U \longrightarrow \underline{F}|_U \longrightarrow 0$, ou, ce qui est équivalent (cf 10.3) à : tout point de X possède un voisinage ouvert U tel que :

$$\forall x \in U \;\; \forall s \in \underline{F}_x \qquad s = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i s_{i,x} \quad \text{où } \lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ et où } s_1, \dots, s_p$$

sont des sections de $\underline{F}$ sur U (ie $s_k \in \underline{F}(U)$).
Alors :

$$U \cap \{x \;/\; \underline{F}_x = 0\} = \{x \in U / s_{1,x} = \dots = s_{p,x} = 0\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{p} \{x \in U / s_{i,x} = 0\} = \text{ouvert comme intersection}$$

finie d'ouverts.

CQFD

11.2 Sous-espace annelé ouvert de X

Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé et U un ouvert de X.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_U \doteq \mathcal{O}_X|_U & & \mathcal{O}_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \overset{i}{\hookrightarrow} & X \end{array}$$

On munit U d'une structure d'espace annelé en considérant le faisceau restreint $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$ sur U. On a :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, i_*(\mathcal{O}_X|_U)) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U)$$

et il est facile de prendre $Id \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X|_U, \mathcal{O}_X|_U)$ et de le transporter. On obtient ainsi le morphisme d'espaces annelé (i, Id) dit morphisme canonique :

$$i = (i, Id) : (U, \mathcal{O}_U) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

$(U, \mathcal{O}_U)$ s'appelle un <u>sous-espace annelé ouvert de X</u>.

11.3 Sous-espace annelé fermé de X défini par un idéal

Soient I un idéal de $\mathcal{O}_X$ (sous-entendu : un faisceau d'idéaux) et $Y = \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_X/I\right)$ (où le support est compris au sens de la définition p39)

$\left(Y, \left(\mathcal{O}_X/I\right)|_Y\right)$ est un espace annelé appelé "<u>sous-espace annelé fermé de X défini par l'idéal I</u>".

C'est même <u>un faisceau d'anneaux unitaires sur Y</u> : Certes, $\mathcal{O}_X/I$ n'est pas un faisceau d'anneaux unitaires sur X puisque $\mathcal{O}_{X,x} = I_x$ sur le complémentaire du support Y, donc $\mathcal{O}_{X,x}/I_x = 0$ = anneau non unitaire si $x \notin Y$.

Comme $\mathcal{O}_X/I$ est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini (puisque $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/I \to 0$) on a, d'après la prop. 11.1 :

$$Y = \mathrm{Supp}\, \mathcal{O}_X/I = \{x \in X \ / \ \mathcal{O}_{X,x} \neq I_x\}$$

donc $\mathcal{O}_{X,x}/I_x \neq 0$ pour tout $x \in Y$ et $\mathcal{O}_{X,x}/I_x$ est bien unitaire.

On notera que $\boxed{\left(\mathcal{O}_X/I\right)|_Y = \mathcal{O}_X|_Y / I|_Y}$. Cela provient de la suite exacte $0 \to I \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/I \longrightarrow 0$ et de l'exactitude du foncteur $i^{-1}(\ ) = |_Y$, qui donne :

$$0 \longrightarrow I|_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X|_Y \longrightarrow \left(\mathcal{O}_X/I\right)|_Y \longrightarrow 0$$

11.4 Définition :

Soit Y un sous-espace annelé fermé de X défini par l'idéal I. On dit que <u>Y est de présentation finie</u> si l'une des prop. équiv. suivantes est vraie :

(i) I est localement de type fini

(ii) $\mathcal{O}_X/I$ est localement de présentation finie.

preuve :

(i) ⇒ (ii) $\quad \mathcal{O}_Y = \left(\mathcal{O}_X/I\right)\big|_Y$ où $Y = \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_X/I\right)$, donc $x \notin Y \Rightarrow \left(\mathcal{O}_X/I\right)_x = 0$.

Ainsi $\mathcal{O}_X/I$ est le prolongé par 0 de $\mathcal{O}_Y$ (cf §6 p28)

Les 2 suites exactes $\begin{cases} \mathcal{O}_X^s \longrightarrow I \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/I \longrightarrow 0 \end{cases}$ se recollent puisque $\mathcal{O}_X^s$ s'envoie surjectivement sur le noyau I de $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/I$, de sorte que l'on ait la suite exacte :

$$\mathcal{O}_X^s \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/I \longrightarrow 0$$

donc $\mathcal{O}_X/I$ est loc. de présentation finie.

(ii) ⇒ (i) trivial : Si $\mathcal{O}_X^s \to \mathcal{O}_X^p \to \mathcal{O}_X/I \to 0$, on a $\mathcal{O}_X^s \to I \to 0$.

faux tout de même ! et si $\mathcal{O}_X^s \to \mathcal{O}_X^p \to \mathcal{O}_X/I$

11.5 Annulateur de $\underline{F}$

Soit $\underline{F}$ un X-module. $\underline{\mathrm{Ann}}(\underline{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \rightsquigarrow \{s \in \mathcal{O}_X(U) \ / \ s.\underline{F}(U) = 0\}$$

$\underline{\mathrm{Ann}}(\underline{F})$ s'appelle le <u>faisceau annulateur de $\underline{F}$</u>.

Si $\underline{F}$ <u>est localement de type fini</u>, $(\underline{\mathrm{Ann}}(\underline{F}))_x = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\underline{F}_x)$ (*). En effet, seule l'inclusion $\mathrm{Ann}\,\underline{F}_x \subset (\underline{\mathrm{Ann}}(\underline{F}))_x$ n'est pas triviale. Si $s \in \mathrm{Ann}\,\underline{F}_x$ $\forall f_x \in \underline{F}_x$ $\quad s.f_x = 0 \Leftrightarrow \exists V_{f_x}$ vois. de x $\quad s \in \mathcal{O}_X(V_{f_x})$ $f \in \underline{F}(V_{f_x})$ $\quad s.f = 0$, s et f admettant les germes s et f_x en x.

Alors on trouvera un voisinage V de x tel que $\forall s \in \mathcal{O}(V)$ et $s.\underline{F}(V) = 0$ dès que $\bigcap_{f_x \in \underline{F}_x} V_{f_x}$ sera un ouvert. C'est vrai en particulier lorsque $\underline{F}$ est loc. de type fini. (cf remarque 10.3)

(*) Si M est un A-module, l'annulateur de M est l'idéal $\mathrm{Ann}_A M = \{a \in A \ / \ ax = 0 \ \forall x \in M\}$

Si $\underline{F}$ est localement de type fini, comme $\mathrm{Ann}\,\underline{F}$ est un idéal, on peut lui associer son sous-espace annelé fermé associé :

$$\left(\mathrm{Supp}\ {}^{\mathcal{O}_X}\!/_{\mathrm{Ann}\,\underline{F}}\ ,\ \left({}^{\mathcal{O}_X}\!/_{\mathrm{Ann}\,\underline{F}}\right)\Big|_{\mathrm{Supp}\ {}^{\mathcal{O}_X}/_{\mathrm{Ann}\,\underline{F}}}\right)$$

On a alors :

$$\mathrm{Supp}\ {}^{\mathcal{O}_X}\!/_{\mathrm{Ann}\,\underline{F}} = \{x\in X \,/\, \mathrm{Ann}\,\underline{F}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$

$$= \{x\in X \,/\, \underline{F}_x \neq 0\} \underset{(11.1)}{=} \mathrm{Supp}\ \underline{F}$$

En effet, $\{x\in X / \mathrm{Ann}\,\underline{F}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} = \{x\in X / \underline{F}_x\neq 0\}$ car si $x\in X$ est tel que $\mathrm{Ann}\,\underline{F}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$, alors $1\notin \mathrm{Ann}\,\underline{F}_x$ (sinon on aurait l'égalité) d'où $\underline{F}_x\neq 0$. Inversement, si $\underline{F}_x\neq 0$, $1\notin \mathrm{Ann}\,\underline{F}_x$ donc $\mathrm{Ann}\,\underline{F}_x\neq \mathcal{O}_{X,x}$ (on utilise seulement le fait que $\mathcal{O}_{X,x}$ est unitaire)

Chapitre 4 — Le théorème de préparation de Weierstrass

1. Faisceau des fonctions analytiques sur un espace vectoriel de dimension finie E

Soit $f = \sum p_k$ une fonction analytique sur E, où $p_k : E \to \mathbb{C}$ sont des appl. polynômes $k \in \mathbb{N}$ homogènes de degré k sur E (cf Chap 1, p 4)

$\omega(f) = \mathrm{Inf}\{k \in \mathbb{N} \mid p_k \neq 0\}$ = ordre de f

On a $\omega(fg) = \omega(f) + \omega(g)$ donc l'anneau $\hat{A}_E$ (resp. A_E) des fonctions analytiques formelles (resp. convergentes) est un anneau intègre.

Rappelons que l'on dit que $f \in \hat{A}_E$ est convergente ssi $\sum \|p_k\| z^k$ converge pour un $z > 0$, où $\|p_k\|$ désigne la norme de l'application multilinéaire symétrique associée à p_k.

$\hat{A}_E$ et A_E sont des anneaux locaux puisque l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal (à savoir : $\{f \mid \omega(f) > 0\}$)

On a :

$$\hat{A}_E / \hat{M}_E \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad A_E / M_E \simeq \mathbb{C}.$$

$$\sum p_k \longmapsto p_0$$

en notant $\hat{M}_E$ et M_E les idéaux maximaux respectifs de $\hat{A}_E$ et A_E.

<u>Notations particulières</u> : Si $E = \mathbb{C}^n$, on notera $A_n = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\} = A_{\mathbb{C}^n}$ et $\hat{A}_n = \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]] = \hat{A}_{\mathbb{C}^n}$.

<u>Remarque</u> : $A_E \hookrightarrow A_{E \times F}$

$\sum p_k \longmapsto \sum p_k \circ \pi$ où $\pi : E \times F \to E$, ce qui a un sens

car $p_k \circ \pi_\delta$ est bien une application multilinéaire symétrique de $E \times F$ dans $\mathbb{C}$ donc $p_k \circ \pi$ est bien un polynôme homogène (cf Chap 1, p 3)

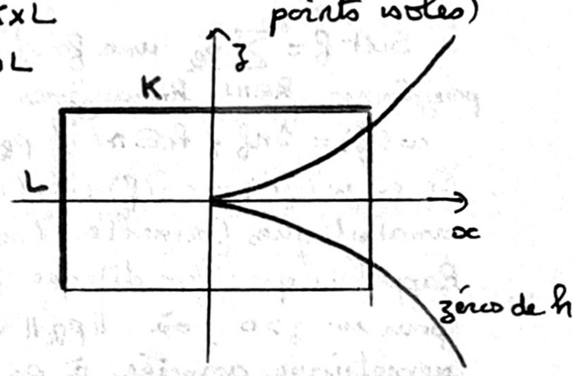
Le faisceau des fcts analytiques sur E, noté $\underline{O}_E$, est le faisceau associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow \underline{O}_E(U)$ = "ens. des fcts anal. sur U".

2. Théorème de préparation de Weierstrass

2.1 Théorème de division de Weierstrass (version globale)

Soient K une partie compacte et connexe de E
L un compact de $\mathbb{C}$ tel que $L = \overline{\mathring{L}}$ (en particulier, L n'a pas de points isolés)
h holomorphe sur un voisinage de $K \times L$

On suppose que $h(x,z) \neq 0$ si $(x,z) \in K \times \partial L$



Alors :

(1) Le nombre de zéro de

$$h_x : L \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto h(x,z)$$

dans $\mathring{L}$ est constant pour tout $x \in K$.

(2) Notons d le nombre de zéro de h_x. Alors :

$$\boxed{B(K \times L) = h.B(K \times L) \oplus B(K) \oplus z B(K) \oplus \ldots \oplus z^{d-1} B(K)}$$

(où $B(T)$ désigne l'ensemble des applications analytique sur l'intérieur $\mathring{T}$ et continues sur T.)

preuve :

$h \in \mathcal{O}(U \times V)$ où $U \times V$ est un ouvert contenant $K \times L$

(1) $h_x : V \to \mathbb{C}$ est holomorphe et

$$d_x = \int_{\partial L} \frac{h_x'(z)}{h_x(z)} dz$$ représente le nbre de zéros de h_x dans L. C'est une fonction continue sur le connexe K à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc constante.

(2) Soient $x \in U$ et $f \in B(L)$. Un th. de Lagrange (amélioré) montre qu'il existe un et un seul polynôme P dans $\mathbb{C}$ qui possède les zéros de f avec leur multiplicité (dans L). Alors $f - P$ est divisible par h_x dans $B(L)$



L'application $\varphi_x : B(L) \oplus \mathbb{C}^d \longrightarrow B(L)$
$$(q, a_0, \dots, a_{d-1}) \longmapsto q h_x + a_0 + \dots + a_{d-1} z^{d-1}$$
est linéaire bijective continue. Le th. de l'inverse continu, valable entre 2 Banach, donne donc que φ_x est un isomorphisme linéaire et topologique.
De là, on peut déduire que l'application :

$$U \longrightarrow \mathcal{L}(B(L) \oplus \mathbb{C}^d, B(L)) = \text{Banach}$$
$$x \longmapsto \varphi_x \text{ (où } \varphi_x \text{ isomorphisme linéaire topologique)}$$

est analytique, ainsi que

$$U \longrightarrow \mathcal{L}(B(L), B(L) \oplus \mathbb{C}^d)$$
$$x \longmapsto \varphi_x^{-1}$$

flou

φ_x^{-1} est un isomorphisme linéaire topologique, donc $\forall f \in B(K \times L)$ $f_x \in B(L)$ et il existe $d(x,z) \in B(L)$, x fixé, ainsi que $(r_0(x), \dots, r_{d-1}(x)) \in \mathbb{C}^d$ tels que $f(x,z) = h(x,z)\, d(x,z) + r_0(x) + \dots + z^{d-1} r_d(x)$
Les $r_0, \dots, r_d$ sont analytique, ie $r_i \in B(K)$: par exemple, $r_0(x) = \pi_0 \circ \varphi_x^{-1}(f_x(z))$ est analytique comme composée de 3 fonctions analytique (π_0 = proj. sur "a_0")
(NB : $K \to B(L)$; $x \mapsto f_x(z)$ est analytique !)
Enfin, comme $B(K \times L) \simeq B(K, B(L))$ d'après la prop. 3.4, du chap 1)
on montre que $d(x,z) \in B(K, B(L))$.

CQFD

2.2 Corollaire : $B(K \times L) / h B(K \times L)$ est un $B(K)$-module libre de rang d
(avec les hyp. de 2.1)

Exemple : $h(x,z) = z^2 - x^3$
$K = \{x \in \mathbb{C} \,/\, |x| \leq \varepsilon\}$
$L = \{x \in \mathbb{C} \,/\, |x| \leq \varepsilon\}$
$z^2 - x^3 = 0 \iff z^2 = x^3$, et si de plus $(x,z) \in K \times \partial L$, $|x|^3 = \varepsilon^2$
donc $|x| = \varepsilon^{2/3} > \varepsilon$ dès que $\varepsilon < 1$.
Ainsi toute fonction $f \in B(K \times L)$ s'écrira :
$$f(x,z) = d(x,z)(z^2 - x^3) + r_0(x) + r_1(x) z$$

Passons maintenant à la version locale du théorème de division de Weierstrass :

(Théorème local de division de Weierstrass)

2.3 Proposition : Soit $h \in A_{E\times\mathbb{C}}$ un germe de série convergente tel que l'image de $h_o = h(0,t)$ dans $A_{\mathbb{C}}$ ne soit pas identiquement nulle, alors le A_E-module $A_{E\times\mathbb{C}}/hA_{E\times\mathbb{C}}$ est libre de type fini et admet pour base $1, t, \dots, t^{d-1}$ où d est l'ordre de h_o (ie la ~~multiplicité du zéro 0 de h_o~~) (ou la valuation) en 0
(ie $h_o(t) = t^d \sum_{i\geq 0} \alpha_i t^i$ $(\alpha_0 \neq 0)$)

preuve :

Comme $h(0,t) \not\equiv 0$ et admet un zéro d'ordre d à l'origine, le principe des zéros isolés (dans $\mathbb{C}$) donne l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $h(0,t) \neq 0$ pour tout $t \in \bar{D}_\varepsilon \setminus \{0\}$. Comme ∂D_ε est un compact, il est facile d'obtenir un

K = compact connexe de E

L = compact de $\mathbb{C}$ = $\bar{D}_\varepsilon$

tels que h ne s'annule jamais sur $K \times \partial D_\varepsilon$

La prop 2.3 résulte de cette remarque. Plus précisement, soient
$$\begin{cases} \tilde{h} \in \underline{\mathcal{O}}_{E\times\mathbb{C}}(U\times V) & \text{de germe } h \text{ en } 0 \\ \tilde{h}_o \in \underline{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}}(V) & \text{de germe } h_o = h(0,.) \text{ en } 0 \end{cases}$$
$\tilde{h}_o$ ne s'annule qu'à l'origine de V et 0 est un zéro de multiplicité d.
D'après ce qui précède, il existe une suite décroissante $(L_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de compacts connexes (prendre des boules) inclus dans V formant un système fondamental de voisinages de 0, et pour chaque $\nu \in \mathbb{N}$ il existe un compact connexe K_ν de E tel que $\tilde{h}$ ne s'annule pas sur $K_\nu \times \partial L_\nu$, $(K_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ forme une suite décroissante et $(K_\nu \times L_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ soit un syst. fond. de voisinages de 0.
Le théorème 2.1 donne la suite exacte scindée :

$$0 \to \tilde{h}\, B(K_\nu \times L_\nu) \longrightarrow B(K_\nu \times L_\nu) \leftrightarrows \sum_{i=0}^{d-1} t^i B(K_\nu) \longrightarrow 0$$

(scindée : cf Th 2.1 (2))
En passant à la limite inductive, on obtient la suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow h_o A_{E\times\mathbb{C}} \longrightarrow A_{E\times\mathbb{C}} \leftrightarrows \sum_{i=0}^{d-1} t^i A_E \longrightarrow 0$$

donc
$$\boxed{A_{E\times\mathbb{C}} = h_o A_{E\times\mathbb{C}} \oplus \sum_{i=0}^{d-1} t^i A_E}$$
← c'est une façon équivalente de formuler la prop. 2.3

CQFD

ex : $f(x,t) = x + x^2 t + t^3$ vérifie $f(0,t) = t^3$, donc tout germe $a(x,t)$ de $\mathbb{C}^2$ en 0 s'écrira :

$$a(x,t) = q(x,t)(x + x^2 t + t^3) + \lambda_0(x) + \lambda_1(x)\, t + \lambda_2(x)\, t^2$$

2.4 Proposition (Théorème local de représentation de Weierstrass)

Soit $h \in A_{E\times\mathbb{C}}$ un germe de fonction analytique convergente en 0 dans $E\times\mathbb{C}$, tel que $h_0 = h(0,.)$ ne soit pas identiquement nulle. Notons k l'ordre de h_0 en 0 (ie la valuation de h_0 en 0)
Il existe une et une seule décomposition :

$$h = u.P$$

où u est une unité de $A_{E\times\mathbb{C}}$ et où P désigne un polynôme de Weierstrass en t de degré k (ie $P(x,t) = t^k + a_1(x)t^{k-1} + \dots + a_k(x)$ où $a_i(0) = 0 \ \forall i$, ie tous les a_i ne sont pas inversibles dans A_E)

preuve :
La prop. 2.3 donne :

$$t^k = \lambda(x,t)\, h + a_k(x) + \dots + a_1(x)\, t^{k-1}$$

d'où :

$$\lambda(x,t)\, h = t^k + a_1(x)\, t^{k-1} + \dots + a_k(x)$$

$\lambda(x,t)$ est une unité. En effet, $\lambda(0,t) h(0,t) = t^k + a_1(0) t^{k-1} + \dots + a_k(0)$ et $h(0,t) = \varphi(t)\, t^k$ par hypothèse, donc :

$$\underbrace{\lambda(0,t)\varphi(t)\, t^k - t^k}_{\text{degrés des monômes} \geq k} = a_1(0) t^{k-1} + \dots + a_k(0) \implies a_1(0) = \dots = a_k(0) = 0$$

Ainsi $\lambda(0,t) \cdot h_0 = t^k$, et comme h_0 est d'ordre k en 0, on a nécessairement $\lambda(0,t) =$ constante $c \neq 0$, donc $\lambda(0,0) = c \neq 0$, donc $\lambda(x,t)$ est bien une unité de $A_{E\times\mathbb{C}}$.

Unicité : elle résulte du Théorème de division 2.3 puisque si $h = u\,P$ où $P(x,t) = t^k + a_1(x) t^{k-1} + \dots + a_k(x)$, on a :

$$t^k = u^{-1}.\, h - a_k(x) - \dots - a_1(x)\, t^{k-1}$$

donc u^{-1} et $a_k(x), \dots, a_1(x)$ uniques d'après 2.3.

CQFD

2.5 Corollaire : L'anneau A_E est noethérien

Pour $n=0$, $A_E = 0$.
Si $n=1$, $A_E = \mathbb{C}\{t\}$ est un anneau principal (tout idéal de $\mathbb{C}\{t\}$ est de la forme $I = (t^k)$ où $k = \inf_{f \in I} \omega(f)$)

Si n quelconque, soit I un idéal non nul de A_E et $h \in I \setminus \{0\}$.
Il faut montrer que I est de type fini. On peut toujours supposer que $E \simeq E' \times \mathbb{C}$ avec $h(0,t) \not\equiv 0$, de sorte que

$$B = A_{E'\times\mathbb{C}} / h A_{E'\times\mathbb{C}} \quad \text{soit un } A_{E'}\text{-module de rang fini.}$$

D'après le chap 2. Co 2.4, comme $A_{E'}$ est un anneau noethérien par hypothèse de récurrence, B est de type fini ssi il est un $A_{E'}$-module noethérien.
Ainsi B est noethérien.
$I / h A_{E'\times\mathbb{C}}$ est un sous-$A_{E'}$-module de B, donc de type fini. Soit $(\dot b_1, \dots, \dot b_s) \in I$ un système générateur de $I / h A_{E'\times\mathbb{C}}$.

$\forall i \in I \quad \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_s \in A_{E'} \quad \exists\, \lambda \in A_{E'\times\mathbb{C}} \quad /$

$$i = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_s b_s + \lambda h$$

donc I est un A_E-module de type fini.

CQFD

2.6 Proposition : Soit M un $A_{E\times F}$-module de type fini tel que $\dim_{\mathbb{C}} M \otimes_{A_E} \mathbb{C} < \infty$. Alors M est un A_E-module de type fini. (*)

Remarques : a) $\mathbb{C} = A_E / m_E$ est structuré en A_E-module. M est un A_E-module grâce à l'application $A_E \hookrightarrow A_{E\times F}$ et $M \otimes_{A_E} \mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (pour la multiplication évidente $\lambda.(m \otimes c) = (\lambda m) \otimes c = m \otimes (\lambda c)$ si $\lambda \in \mathbb{C}$. Noter que $\mathbb{C} \hookrightarrow A_E$, donc que tout A_E-module, en particulier $M \otimes_{A_E} \mathbb{C}$, est canoniquement structuré en $\mathbb{C}$-espace vectoriel)

(*) E et F de dim finie sur $\mathbb{C}$

b) <u>La réciproque est vraie</u> : si M est un <u>A_E-module de type fini</u>, $M = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ dans A_E, donc tout élément $m \otimes c$ s'écrira :

$$m \otimes c = (\lambda_1 \gamma_1 + \dots + \lambda_k \gamma_k) \otimes c = \sum (\lambda_i \gamma_i) \otimes c \qquad \lambda_i \in A_E \quad c \in \mathbb{C} = A_E / \mathfrak{m}_E$$

Mais $\lambda_i = c_i + \lambda'_i$ où $\lambda'_i \in \mathfrak{m}_E$ et $c_i \in \mathbb{C}$, donc :

$$m \otimes c = \sum c_i \gamma_i \otimes c + (\lambda'_i \gamma_i) \otimes c$$

Mais $(\lambda'_i \gamma_i) \otimes c = \gamma_i \otimes (\lambda'_i c) = \gamma_i \otimes 0 = 0$ car $\lambda'_i \in \mathfrak{m}_E$. Finalement, $m \otimes c = \sum c_i c (\gamma_i \otimes 1)$ donc $(\gamma_1 \otimes 1, \dots, \gamma_n \otimes 1)$ <u>engendre $M \otimes_{A_E} \mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel</u>.

<u>Remarque 2.6.1</u> :

$$\boxed{M \otimes_{A_E} \mathbb{C} = M \otimes_{A_{E\times F}} A_{E\times F} / \mathfrak{m}_E A_{E\times F}}$$

En effet, $A_{E\times F} / \mathfrak{m}_E A_{E\times F} = A_F$ car si $\sum a_{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta \in A_{E\times F}$, on a

$$\sum a_{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta = \underbrace{\sum_{\alpha > 0} a_{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta}_{\in \mathfrak{m}_E A_{E\times F}} + \underbrace{\sum_{\alpha = 0} a_{0\beta} t^\beta}_{\in A_F}$$

et $A_F = A_{E\times F} \otimes_{A_E} \mathbb{C}$ d'après la suite exacte :

$$\mathfrak{m}_E \longrightarrow A_E \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

et puisque le produit tensoriel est exact à droite :

$$A_{E\times F} \otimes_{A_E} \mathfrak{m}_E \xrightarrow{\varphi} A_{E\times F} \otimes_{A_E} A_E \longrightarrow A_{E\times F} \otimes_{A_E} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

$$A_{E\times F} \otimes_{A_E} A_E = A_{E\times F}$$

$$\operatorname{Im}\varphi = \mathfrak{m}_E A_{E\times F}$$

On a donc bien

$$M \otimes_{A_{E\times F}} A_{E\times F} / \mathfrak{m}_E A_{E\times F} = M \otimes_{A_{E\times F}} A_F = M \otimes_{A_{E\times F}} (A_{E\times F} \otimes_{A_E} \mathbb{C}) = M \otimes_{A_E} \mathbb{C}.$$

<u>lemme 2.6.2</u> :

Si $M = A_{E\times\mathbb{C}^p}$-module de type fini et $\dim_{\mathbb{C}} M \otimes_{A_E} \mathbb{C} < \infty$, alors il existe $h \in A_{E\times\mathbb{C}^p}$, $h \neq 0$, dont l'image dans $A_{\mathbb{C}^p}$ est non nulle et telle que $h.M = 0$.

preuve : Notons que $A_{\mathbb{C}^p} = A_{E\times\mathbb{C}^p} / \mathfrak{m}_E A_{E\times\mathbb{C}^p}$ est une $A_{E\times\mathbb{C}^p}$-algèbre.

<u>Rappel</u> (prop 5.3) : si A est un anneau et si M est un A-module de type fini, et si B = A-algèbre, alors en notant $J = \operatorname{Ann}(M \otimes B)$ on a

$$J \subset \sqrt{IB}$$

où $I = \operatorname{Ann}(M)$

Ici, on obtient pour $M = A_{E\times\mathbb{C}^p}$ - module de type fini

$$J = \mathrm{Ann}\left(M \otimes A_{E\times\mathbb{C}^p}/\mathfrak{m}_E A_{E\times\mathbb{C}^p}\right)$$

$$B = A_{E\times\mathbb{C}^p}/\mathfrak{m}_E A_{E\times\mathbb{C}^p}$$

$$J = \mathrm{Ann}\left(M \otimes A_{E\times\mathbb{C}^p}/\mathfrak{m}_E A_{E\times\mathbb{C}^p}\right) \subset \sqrt{IB}$$

Le lemme 2.6.2 sera montré si l'on démontre que $J \neq 0$, puisqu'alors $IB \neq 0$.

Considérons $N = M \otimes_{A_E} A_{E\times\mathbb{C}^p}/\mathfrak{m}_E A_{E\times\mathbb{C}^p}$. N est de dimension fini d'après 2.6.1 et l'hypothèse $\dim(M \otimes_{A_E} \mathbb{C}) < \infty$. Soit $n_1, \dots, n_\ell$ une base de N.

$$N = \sum \mathbb{C} n_i = \sum B n_i \quad \text{puisque} \quad N = \sum \mathbb{C} n_i \subset \sum B n_i \subset N$$

On a $B n_i \simeq B/\mathrm{Ann}\, n_i$ (par l'application $b \mapsto b n_i$), donc ~~Bn~~

$\mathrm{Ann}_B n_i \neq 0$ (sinon $Bn_i = B$ et $Bn_i \subset N \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} Bn_i < \dim_{\mathbb{C}} N < \infty$, ce qui est absurde), donc $\exists\, b_i \neq 0 \,/\, b_i n_i = 0$

d'où $\prod_{i=1}^{\ell} b_i \in \mathrm{Ann}\, N = J \Rightarrow J \neq 0$

CQFD

preuve de la prop. 2.6 : récurrence sur dim F.

* $p = 1 \Leftrightarrow F = \mathbb{C}$. D'après le lemme 2.6.2,

$\exists\, h \in A_{E\times\mathbb{C}} \,/\, h(0,t) \neq 0$ puisque l'image de h dans $A_{\mathbb{C}^p} = A_{E\times\mathbb{C}^p}/\mathfrak{m}_E A_{E\times\mathbb{C}^p}$ n'est pas nulle et telle que $hM = 0$. Ainsi :

(1) $M = M/hM = A/hA \otimes_A M$ en posant $A = A_{E\times\mathbb{C}}$

Donc M est un A/hA - module de type fini (car M est un A-module de type fini).

Le théorème de préparation de Weierstrass montre que A/hA est un A_E-module de type fini, donc M est un A_E - module de type fini. (*)

(*) : M = N-module de type fini
N = A-mod " " } ⇒ M = A-mod de type fini

* Si $p > 1$, soit $F = \mathbb{C} \times F'$

(2) $\dim_{\mathbb{C}} (M \otimes_{A_E} \mathbb{C}) < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} M \otimes_{A_{E \times F'}} \mathbb{C} < \infty$ (3)

En effet, on a la surjection évidente :

$$M \otimes_{A_E} \mathbb{C} \overset{(2.6.1)}{=} M \otimes_{A_{E\times F'}} A_{E\times F'} / \mathfrak{m}_E A_{E\times F'} \quad \text{de dim finie.}$$

$$\downarrow \text{surjection (provient de la surj. can)}$$

$$M \otimes_{A_{E\times F'}} \mathbb{C} = M \otimes_{A_{E\times F'}} A_{E\times F'} / \mathfrak{m}_{E\times F'} A_{E\times F'}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

L'hypothèse de récurrence au rang 1 et (3) montre que M est un $A_{E\times F'}$-module de type fini. Enfin (2) montre que l'hypothèse de récurrence est applicable : M est un A_E-module de type fini.

CQFD

2.7. Définition : Soit U un ouvert de E. Un sous-ensemble Δ de U est dit *mince* si

$\forall x \in U \ \exists$ ouvert connexe $V \subset U$ $x \in V$ $\exists h$ analytique sur V tels que $\Delta \cap V \subset h^{-1}(0)$.

2.8 Théorème (des Singularités inexistantes)

U ouvert de E

Δ sous-ensemble mince de U $(\Delta \neq U)$

(1) $U \setminus \bar{\Delta}$ est dense dans U.

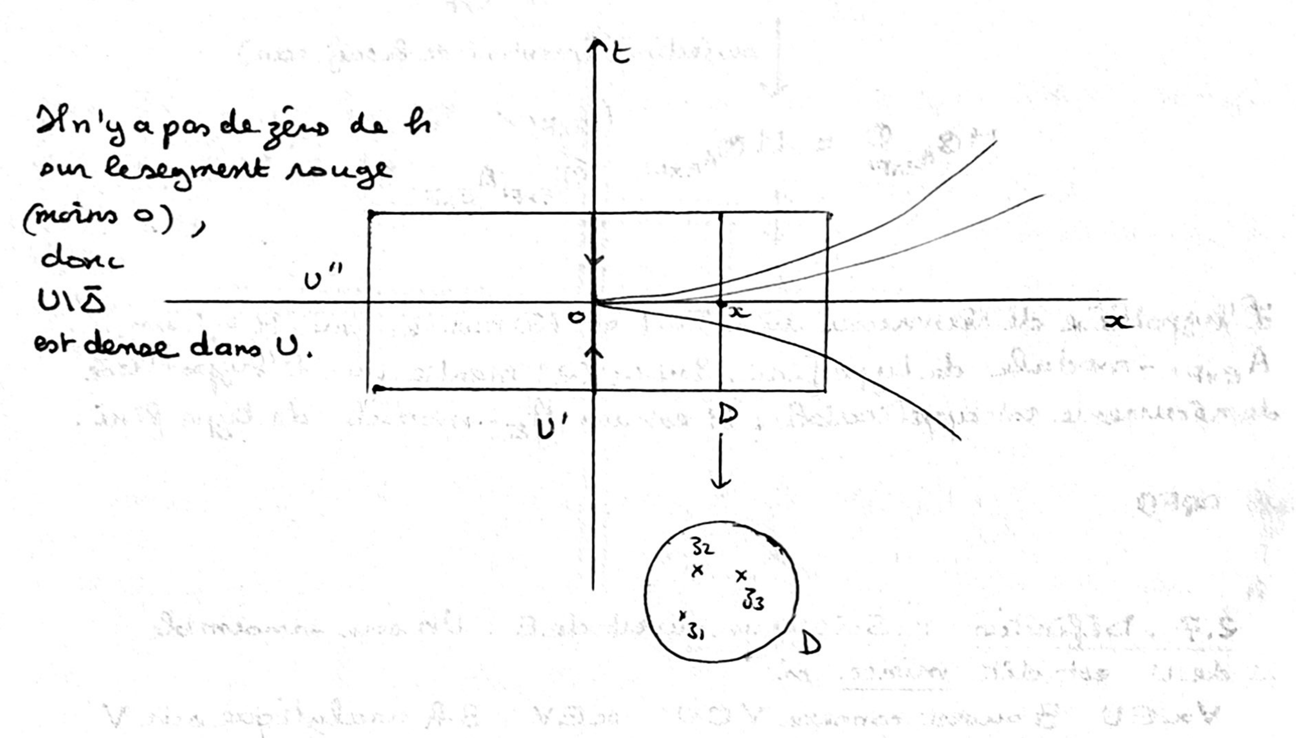
(2)

f continue sur $U \setminus \Delta$, analytique sur $U \setminus \bar{\Delta}$, bornée au voisinage de Δ $\Rightarrow$ f se prolonge en une fonction analytique unique sur U tout entier.

(NB : f est dite bornée au voisinage de Δ si tout point δ de Δ possède un voisinage W tel que $f|_{W\setminus\Delta}$ soit bornée.)

preuve :

(1) $E = \mathbb{C}^n$ $V \Subset \mathbb{C}^n$ h analytique sur V. On peut supposer que $\Delta = h^{-1}(0)$ (qui peut le plus peut le moins)
On choisit une direction t telle que $h(0,t) \not\equiv 0$ et on se place dans la situation du théorème de préparation de Weierstrass 2.1 (en utilisant le raisonnement de la prop. 2.3) :



(2) admis (cf. Narashiman, Several complex variables)
On voit facilement que, pour x fixé,

$f_x(t)$ est analytique sur $D \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$ et bornée au voisinage de $\zeta_1, \dots, \zeta_d$, donc (d'après le théorème de prolongement au vois. de singularités inexistantes dans $\mathbb{C}$ provenant du dével. en séries de Laurent) f_x se prolonge sur D en 1 fct anal. sur D.

Il faudrait, ensuite, recoller tout cela.

Chap. 5 **Espaces analytiques**

1. Définitions

1.1 Un espace annelé en $\mathbb{C}$-algèbre est un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ tel que $\mathcal{O}_X$ soit un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres. On obtient la catégorie correspondante en considérant les morphismes d'espaces annelés $f=(\varphi,\psi)$ tels que $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y, \varphi_* \mathcal{O}_X)$ soit un morphisme de faisceaux de $\mathbb{C}$-algèbres.
$(X, \mathcal{O}_X)$ est dit "espace annelé en $\mathbb{C}$-algèbres locales" s'il est annelé en $\mathbb{C}$-algèbres et si

$$\forall x \in X \quad \mathcal{O}_{X,x} = \mathbb{C}\text{-algèbre locale d'idéal maximal } \mathfrak{m}_{X,x}$$
$$\text{tel que} \quad \mathbb{C} \simeq \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{O}_{X,x} \quad (*)$$

NB : $\tilde{\varepsilon}_x : \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ envoie 1 sur 1 car on sous-entend toujours qu'un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres locales applique l'élément neutre de la multiplication sur l'élément neutre 1.

1.2 Application sous-jacente à une section de $\mathcal{O}_X$

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé en $\mathbb{C}$-algèbre locale.
Si $f \in \mathcal{O}_X(U)$ et $x \in U$, on note

$$\varepsilon_x : \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$
$$f \longmapsto \varepsilon_x(f)$$

le morphisme évaluation en x. (Usuellement, $\varepsilon_x(f) = f(x)$)

On définit
$$\{f\} : U \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto \varepsilon_x(f) = \{f\}(x)$$

Alors $\{f\} = 0 \not\Rightarrow f = 0$

(*) $\varepsilon_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{C}$ défini $\tilde{\varepsilon}_x : \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, est donné avec la structure de "esp. ann. en $\mathbb{C}$-alg loc".

NB $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}/x^2\mathcal{O}_{\mathbb{C}}\Big|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} = 0$

(*) $\left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}/x^2\mathcal{O}_{\mathbb{C}}\right)_y = 0 \neq$ anneau local si $y \neq 0$

1.2.1 Exemple 1 : $X = \{0\}$ $\quad \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}/x^2\mathcal{O}_{\mathbb{C}}\Big|_{\{0\}}$

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{X,0} = \mathbb{C}\{x\}/x^2\mathbb{C}\{x\} \\ \mathfrak{m}_{X,0} = \dot{x}\,\mathcal{O}_{X,0} \end{cases}$$ car l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{x\}$ est $x\,\mathbb{C}\{x\}$.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x$ est dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ donc induit une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}/x^2\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ par composition avec la projection canonique $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}/x^2\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$

On a $\{f\}(0) = \varepsilon_0(f) = f(0) = 0$ (*) et pourtant f n'est pas la section nulle.

1.2.2 Exemple 2 :

Dans $\mathbb{C}^2$, on prend $X : y^2 - x^3 = 0$ et $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(y^2-x^3)^2\Big|_X$

Prenons $f(x,y) = y^2 - x^3 \in \mathcal{O}_X(X)$

On a

$0 = \varepsilon_0(f)$ et même $\{f\}(x) = 0 \quad \forall x \in X$ (*), et pourtant f n'est pas la section nulle.

NB : Encore une fois, on écrit que $f = y^2 - x^3 \in \mathcal{O}_X(X)$ alors que $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(\mathbb{C})$ de façon rigoureuse. Mais il est clair qu'une section f de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$ donne une section du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(y^2-x^3)^2$ par composition avec la projection canonique

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(y^2-x^3)^2 \to 0$$

Il suffit alors de restreindre $\pi \circ f$ à X pour obtenir une section de $\mathcal{O}_X(X)$.

1.2.3 Exemple 3 : $X = \mathbb{C}$ $\quad \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$

où la multiplication est donnée par :

$1 = (1,0)$

$y = (0,1)$

$(f_0 + y f_1)(g_0 + y g_1) = f_0 g_0 + y(f_1 g_0 + f_0 g_1)$

(*) dans ces exemples, $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas réduit (ie $\sqrt{0} \neq 0$)

(*) cf 2.2 p 48

Alors $y \in \mathcal{O}_X(\mathbb{C})$ $\overset{?}{\overbrace{\{y\}=0}}$ et $y \neq 0$.

On peut d'ailleurs identifier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X'} = \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} / y^2 \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \right) \Big|_{y=0}$
(où $X' = \mathbb{C}$) fibre à fibre.

1.3 Modèle d'espace analytique complexe.

$U \subset \mathbb{C}^p$ $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}(U)$ p fonctions analytiques sur l'ouvert U de $\mathbb{C}^p$

Soit :

$$\begin{cases} X = \{x \in U / \ f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0\} \\ \mathcal{O}_X = \left(\dfrac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p}|_U}{(f_1, \dots, f_p)} \right) \Bigg|_X \end{cases} \qquad (**)$$

$(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé en $\mathbb{C}$-algèbre locale appelé modèle d'espaces analytique.
On notera $(n, U, f_1, \dots, f_p)$ un tel modèle, et on dira que le modèle est lisse si $p = 0$.

1.4 Définition : Un espace analytique complexe est un espace annelé en $\mathbb{C}$-algèbres localement isomorphe à un modèle d'espace analytique (ie tel que tout point x de la base X de $(X, \mathcal{O}_X)$ possède un voisinage ouvert U tel que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ soit isomorphe(*) à un modèle d'espace analytique 1.3)

NB : On peut définir un espace anal. complexe par recollement de cartes (cf Grothendieck)

D'après cette définition 1.4, si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace analytique, alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est local et noethérien pour tout $x \in X$

On obtient la catégorie des espaces analytiques en prenant pour morphismes les morphismes d'espaces annelés en $\mathbb{C}$-algèbres. Ces morphismes seront "locaux" (cf 2.1 p48)
Notons $\mathrm{Mor}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes d'espaces analytiques de X vers Y.

Soit A et B 2 faisceaux sur X :

(**) Rappel : 1) $\left(A/B\right)\big|_U = A|_U / B|_U$ ie $|_U$ passe au quotient car $|_U \,(= i^{-1}(\ ))$ est un foncteur exact

2) $\left(A/B\right)_x = A_x / B_x$ $\forall x \in X$ car $(\ )_x$ est un foncteur exact (cf $\varinjlim$ est exact)

3) Attention ! Si $U \subset X$ $\left(A/B\right)(U) \neq A(U)/B(U)$ car le foncteur section sur un ouvert est seulement exact à gauche.

(*) en tant qu'espaces annelés en $\mathbb{C}$-algèbres.

1.5 Sous-espace analytique ouvert : C'est un sous-espace annelé ouvert de X.

Si $U \Subset X$, c'est $(U, \mathcal{O}_X|_U)$

C'est encore un espace analytique de façon triviale.

1.6 Sous-espace analytique fermé : C'est un sous-espace annelé fermé défini par un idéal de type fini.

On ajoute la condition "de type fini" pour pouvoir montrer que

$$(Y, \mathcal{O}_Y) \doteq \left(\mathrm{Supp}\ \mathcal{O}_X/I \ , \ \left(\mathcal{O}_X/I\right)\Big|_{\mathrm{Supp}\ \mathcal{O}_X/I} \right)$$

est encore un espace analytique :

preuve : (les notations sont celles du 11.3 chap 4.)

$\forall y \in X$

I de type fini $\Rightarrow \exists V$ ouvert de X $y \in V$ et $I|_V$ engendré par des sections $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}_X(V)$ sur V.

$$Y = \mathrm{Supp}\ \mathcal{O}_X/I \Rightarrow Y \cap V = \{x \in V / f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0\}$$

$$\mathcal{O}_Y|_{Y\cap V} = \left(\frac{\mathcal{O}_V}{(f_1, \dots, f_p)} \right)\Big|_{Y\cap V} \quad \text{où l'on pose } \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X|_V$$

Mais $\mathcal{O}_V = \left(\mathcal{O}_U/(g_1, \dots, g_s) \right)\Big|_V$ quitte à diminuer V, car X est un espace analytique, où U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. (*)

$f_i \in \mathcal{O}_V(V)$ donc il existe $h_i \in \mathcal{O}_U(U)$ tel que $f_i = \dot{h}_i$, quitte à diminuer U (retourner aux germes, après l'identification (*) on a $(\mathcal{O}_V)_x = \left(\left(\mathcal{O}_U/(g_1, \dots, g_s)\right)\Big|_V \right)_x = \mathcal{O}_{U,x}/(g_{1_x}, \dots, g_{s_x})$, cf (**) rappels ci-derrière, donc $f_{i,x} = \dot{h}_{i,x}$ et il suffit d'épaissir U autour de x }. On diminue U, au besoin, car $h_{i,x}$ peut ne pas être défini sur tout U ! l'isomorphisme étant certain au niveau des fibres, mais pas pour les sections car $(A/B)(U) \neq A(U)/B(U)$, cf rappels (**) ci-derrière)

Alors :

$$\mathcal{O}_Y|_{Y\cap V} = \left(\frac{\mathcal{O}_V}{(f_1, \dots, f_p)} \right)\Big|_{Y\cap V} \underset{\text{car}}{=} \frac{\mathcal{O}_U}{(h_1, \dots, h_p, g_1, \dots, g_s)}$$

$$\mathcal{O}_V \xrightarrow{\varphi} \left(\mathcal{O}_U/(g_1, \dots, g_s)\right)/(h_1, \dots, h_p) \to 0 \quad \text{car } \mathcal{O}_U/(g_1, \dots, g_s) = \mathcal{O}_V$$

$$\mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_V/\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathcal{O}_V/(f_1, \dots, f_p) \xrightarrow{\sim}$$

2. Morphismes d'espaces analytiques

2.1 Proposition : Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un morphisme d'espaces analytiques, si $x \in X$ et $y = \varphi(x)$ alors l'homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\varphi_x^* : \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

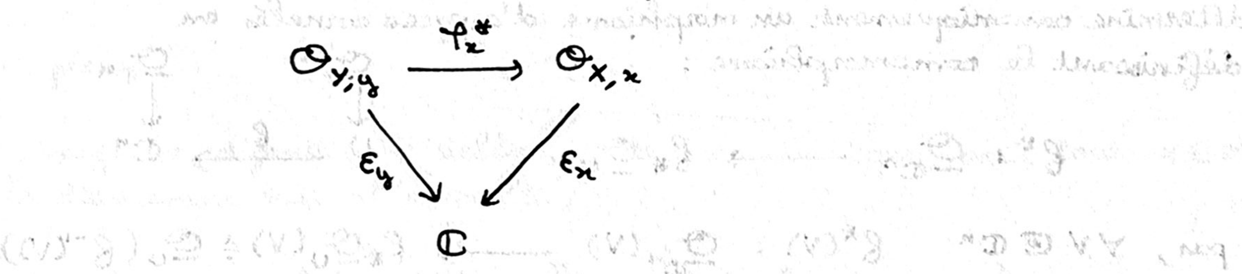
est local (ie $\varphi_x^*(\mathfrak{m}_{Y,y}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$)

preuve : Notons $\varphi = (\varphi, \bar{\varphi})$ où $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y, \varphi_* \mathcal{O}_X) = \mathrm{Hom}(\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X)$
La fibre de $\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y)$ au dessus de x est $\mathcal{O}_{Y,y}$ d'où

$$\varphi_x^* \doteq \bar{\varphi}_x : \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \quad \text{(par passage à la limite inductive.)}$$

Soient ε_x (resp ε_y) le morphisme d'évaluation en x de X (en y de Y)
On a : ε_x ~~passe~~ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_x} \mathbb{C}$.

ε_x et φ_x^* sont surjectives et appliquent 1 sur 1.



$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varepsilon_x \circ \varphi_x^*) \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{\varepsilon_x \circ \varphi_x^*} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

donc $\mathcal{O}_{Y,y} / \mathrm{Ker}(\varepsilon_x \circ \varphi_x^*) \simeq \mathbb{C}$ est un corps, donc $\mathrm{Ker}(\varepsilon_x \circ \varphi_x^*)$ est un idéal maximal, càd $\mathrm{Ker}(\varepsilon_x \circ \varphi_x^*) = \mathfrak{m}_{Y,y}$ car $\mathcal{O}_{Y,y}$ est local.
Comme $\mathfrak{m}_{X,x} = \mathrm{Ker}\, \varepsilon_x$, on en déduit que

$$\boxed{\varphi_x^*(\mathfrak{m}_{Y,y}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}}$$

CQFD

NB : $\boxed{\varepsilon_x \circ \varphi_x^* = \varepsilon_y}$

En effet $\underset{\mathbb{C}}{\varepsilon_x \circ \varphi_x^*(h) = \lambda} \Rightarrow \varepsilon_x \circ \varphi_x^*(h - \lambda) = 0$
$\Rightarrow h = \lambda + m \quad m \in \mathfrak{m}_{Y,y} = \mathrm{Ker}\, \varepsilon_y$
$\Rightarrow \varepsilon_y(h) = \varepsilon_y(\lambda) = \lambda\, \varepsilon_y(1) = \lambda$

Finalement $\varepsilon_x \circ \varphi_x^* = \varepsilon_y$

2.2 Application : $X : y^2 - x^3 = 0 \subset \mathbb{C}^2$

$$\mathcal{O}_X = \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} / (y^2 - x^3)^2 \right) \Big|_X$$

Alors

$$\varepsilon'_{(1,1)} \left(\dot{\overline{f(x,y)}} \right) = f(1,1) = \text{évaluation de } \overline{f(x,y)} \text{ en } \dot{\overline{(1,1)}}$$

puisque $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,(1,1)} \xrightarrow{\varphi^*_{(1,1)}} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} / (y^2-x^3)^2 \right) \Big|_{X, \dot{\overline{(1,1)}}} \xrightarrow{\varepsilon'_{\dot{\overline{(1,1)}}}} \mathbb{C}$, avec $\varepsilon_{(1,1)}$ la composée.

X
il faut intercaler
$\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$
et $\varphi^*_x : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, \varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$

2.3 Exemples

a) Si $U \Subset \mathbb{C}^m$ et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$, $f = (f_1, \dots, f_n) : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ détermine canoniquement un morphisme d'espaces annelés en définissant le comorphisme :

$$f^* : \underline{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow f_* \underline{\mathcal{O}}_U \qquad \begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{O}}_U & & \underline{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

par, $\forall V \Subset \mathbb{C}^n$ $\quad f^*(V) : \underline{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^n}(V) \longrightarrow f_* \underline{\mathcal{O}}_U(V) \doteq \underline{\mathcal{O}}_U(f^{-1}(V))$

$$g \longmapsto g \circ f$$

b) Voici un exemple où f^* ne dépend pas de f :

$X = Y = (Z, \mathbb{C}^2, y^2)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(y^2) \big|_{(y=0)} & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(y^2) \big|_{(y=0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (y=0) & \xrightarrow{f = Id} & (y=0) \end{array}$$

où l'on définit $f^*(f_0 + y f_1) = f_0$.
On vérifie que (f, f^*) est un morphisme d'espaces annelé en $\mathbb{C}$-algèbres locales.

Notations :

Hom $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ = ensemble des morphismes de faisceaux,
Morph (X, Y) = ensemble des morphismes d'espaces annelés,
Mor (X, Y) = " " d'espaces analytiques.

2.4 Théorème

$z_1, \dots, z_n$ coordonnées de $\mathbb{C}^n$, X espace annelé

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Morph}(X, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_X} & (\mathcal{O}_X(X))^n \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi_i = \varphi^*(z_i))_{1 \leq i \leq n} \end{array}$$

σ_X est bien définie car $\varphi^* : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \to \varphi_* \mathcal{O}_X$ et $z_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$, donc $\varphi^*(z_i) \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(\mathbb{C}^n)) = \mathcal{O}_X(X)$ car φ est une application.
(par abus, on écrit $\varphi^*(z_i)$ au lieu de $\varphi^*(\mathbb{C}^n)(z_i)$, abus que l'on fera constamment par la suite)
Alors σ_X est bijective et dépend fonctoriellement de X.

preuve :

Dire que σ_X dépend fonctoriellement de X signifie que, pour tout $\alpha \in \mathrm{Morph}(Y, X)$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{cccc} \beta & \mathrm{Morph}(X, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_X} & \mathcal{O}_X(X)^n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \alpha^*(X) \\ \beta \circ \alpha & \mathrm{Morph}(Y, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_Y} & \mathcal{O}_Y(Y)^n \end{array}$$

$Y \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}^n$

$\alpha = (\alpha, \alpha^*)$ où $\alpha^* \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \alpha_* \mathcal{O}_Y)$

En d'autres termes, $\sigma = \{\sigma_X\}_X$ est un morphisme de foncteurs entre le foncteur $X \rightsquigarrow \mathrm{Morph}(X, \mathbb{C}^n)$ et le foncteur $X \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(X)^n$

a) σ_X dépend fonctoriellement de X :

$$\begin{array}{ccc} (\varphi, \varphi^*) \in \mathrm{Morph}(X, \mathbb{C}^n) & & \\ \downarrow & & \\ (\varphi \circ \alpha, \varphi_*(\alpha^*) \circ \varphi^*) \in \mathrm{Morph}(Y, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_Y} & \mathcal{O}_Y(Y)^n \\ & \longmapsto & \varphi_*(\alpha^*) \circ \varphi^*(z_i) \end{array}$$

$\varphi_* f : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$

$\alpha^* : \mathcal{O}_X \longrightarrow \alpha_*(\mathcal{O}_Y) \Rightarrow \varphi_*(\alpha^*) : \varphi_*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \varphi_* \alpha_* \mathcal{O}_Y$

donc $\varphi_*(\alpha^*) \circ \varphi^* : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow (\varphi \circ \alpha)_* \mathcal{O}_Y = \varphi_*(\alpha_* \mathcal{O}_Y)$ est bien définie.

$\varphi_*(\alpha^*) \circ \varphi^*(z_i) = \varphi_*(\alpha^*)\varphi_i$ où $\varphi_i \in \mathcal{O}_X(X)$

(on devrait écrire $(\varphi_*(\alpha^*) \circ \varphi^*)(\mathbb{C}^n)(z_i) = \varphi_*(\alpha^*)(\mathbb{C}^n) \circ \varphi^*(\mathbb{C}^n)(z_i)$ ce qui complique les notations. Avec cet abus :)

$$\varphi_*(\alpha^*)(\mathbb{C}^n) \underset{\text{abus}}{=} \varphi_*(\alpha^*) \in \mathrm{Hom}(\varphi_* \mathcal{O}_X(\mathbb{C}^n), \varphi_* \alpha_* \mathcal{O}_Y(\mathbb{C}^n)) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Y(Y))$$

et par définition du foncteur φ_* "image directe de faisceaux", on a :

$$\varphi_*(\alpha^*)(\mathbb{C}^n) = \alpha^*(\varphi^{-1}(\mathbb{C}^n)) = \alpha^*(X)$$

Donc : $\varphi_*(\alpha^*) \circ \varphi^*(z_i) = \alpha^*(X)(\varphi_i) = \alpha^*(X) \circ \sigma_X(\varphi)$

et la commutativité du diagramme est démontrée.

b) <u>Surjectivité de σ_X dans le cas lisse</u> :

On a vu (exc 2.3 a)) que si $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^m)$, $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$ détermine canoniquement un morphisme $f \in \mathrm{Morph}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$

Supposons $X = \mathbb{C}^m$ et soit $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^m)^n$.

$f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{Morph}(X, \mathbb{C}^n)$ vérifie $\sigma_X(f) = (f_1, \ldots, f_n)$ puisque

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^m = X & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\ z_i\ } & \mathbb{C} \\ x = (x_1, \ldots, x_m) & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_n(x)) & \longmapsto & f_i(x) \end{array}$$

c) <u>Surjectivité de σ_X dans le cas où X n'est pas lisse</u> :

Soient $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{O}_X(X)^n$.

On peut supposer que

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m} / (f_1, \ldots, f_q) \Big| \text{Support} = X$$

puisque le problème est local (on recollerait ensuite les sections obtenues grâce à l'unicité de l'antécédent montré en d))

$\exists U \in \mathbb{C}^n \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U) \quad$ et $\overline{\varphi}_i = \varphi_i$

$$\mathcal{O}_X|_U = \mathcal{O}_U / (f_1, \dots, f_g)|_{U\cap X} \xleftarrow[\text{quotient}]{\varphi_i = \overline{\varphi}_i \text{ passage au}} \mathcal{O}_U \ni \varphi_i \longleftarrow z_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$$

$$\mathrm{Supp}\, \mathcal{O}_U/(f_1,\dots,f_g) = U \cap X \overset{i}{\hookrightarrow} U \xrightarrow{(\varphi_1,\dots,\varphi_n)} \mathbb{C}^n$$

$U\cap X \overset{i}{\hookrightarrow} U$ est une immersion fermée, et $U \cap X$ est un sous-espace analytique fermé de U associé à l'idéal $(f_1, \dots, f_g)$, puisque $X = \mathrm{Supp}(f_1, \dots, f_g) \doteq \mathrm{Supp}\, \mathcal{O}_U/(f_1,\dots,f_g)$

(écrire : $\{\mathrm{Supp}_U \mathcal{O}_U/(f_1\dots f_g) = \{x \in U / \exists i \ f_i(x) \neq 0\} = \complement_U \{x \in U / f_1(x) = \dots = f_g(x) = 0\}$)

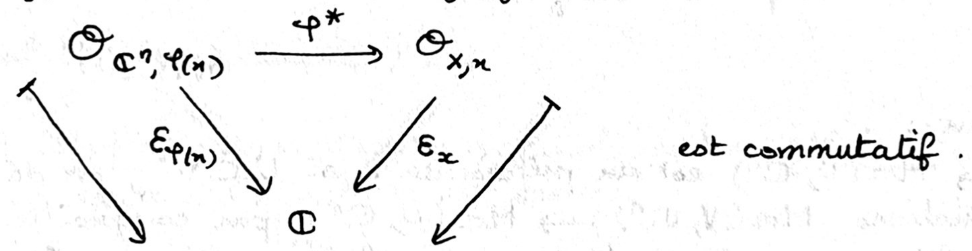
Le morphisme $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \circ i \in \mathrm{Morph}(U \cap X, \mathbb{C}^n)$ définit bien $\varphi \in \mathrm{Morph}(X, \mathbb{C}^n)$ tel que $\sigma_X(\varphi) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

σ_X est surjective.

d) <u>Unicité de l'antécédent</u> : Il faut vérifier que

$$\varphi^* z_i = f_i \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad (\varphi, \varphi^*) \text{ unique (tel que } \sigma_X(\varphi) = (f_1, \dots, f_n))$$

Le diagramme



est commutatif.

i-coordonnée de $\varphi(x)$ $= \varepsilon_x(f_i)$

$\varphi(x) = (\varepsilon_x(f_1), \dots, \varepsilon_x(f_n))$ donc φ est unique.

<u>Unicité de φ^*</u> : ie $\forall a \in X \quad \varphi_a^*$ est unique

$\varphi_a^*(z'_i = z_i - a) = f_i - a$, donc s'il existait 2 tels morphismes φ^* et φ'^*, on aurait :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, a} = \mathbb{C}\{z'_i\} \xrightarrow{\varphi_a^* - \varphi'^*_a} \mathcal{O}_{X,x}$$
$$z'_i \longmapsto 0$$

donc $\begin{cases} \varphi_a^*(\lambda) = \varphi'^*_a(\lambda) = \lambda \text{ si } \lambda \in \mathbb{C} \\ \varphi_a^*(z'^k_i) = \varphi'^*_a(z'^k_i) = 0 \quad \text{si } k \geq 1. \end{cases}$

Posons $\tilde{\varphi}_a^* = \varphi_a^* - \varphi_a'^*$. $\forall f \in \mathbb{C}\{z_i\}$,

$$\tilde{\varphi}_a^*(f) = \tilde{\varphi}_a^*(\underbrace{\text{polynôme}}_{\tilde{\varphi}_a^* \text{ s'annule sur les polynôme}} + \underbrace{\sum_{i \geq k} a_i z'^k}_{\in \mathfrak{m}^k_{\varphi(a)}}) \in \tilde{\varphi}_a^*(\mathfrak{m}^k_{\varphi(a)}) \subset \mathfrak{m}_a^k$$

(car $\tilde{\varphi}_a^*$ est local)

donc $\tilde{\varphi}_a^*(f) \in \bigcap_{k \geq 0} \mathfrak{m}_a^k = \{0\}$ d'après la prop.

puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien.

CQFD

2.5 Proposition : Soit X un espace analytique et $U \Subset X$.

La correspondance $U \rightsquigarrow \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n)$ = morphismes de la catégorie des espaces analytiques définit un faisceau, et $\sigma = \{\sigma_U\}_{U \Subset X}$ où :

$$\sigma_U : \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)^n$$

est un isomorphisme de faisceau.

preuve :

$U \rightsquigarrow \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n)$ est un préfaisceau : si $U \subset V$, on définit les restrictions $\text{Mor}(V, \mathbb{C}^n) \longrightarrow \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n)$ par composition avec le morphisme canonique d'espaces analytiques $U \hookrightarrow V$.

On vérifie facilement qu'il s'agit d'un faisceau.

$\sigma_U : \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n) \to \mathcal{O}_X(U)$ est un morphisme de faisceau puisque dépendant fonctoriellement de U (cf Th 2.4 pour $\alpha = i : U \hookrightarrow V$:

$$\begin{array}{cccc} \beta & \text{Mor}(V, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\sigma_V} & \mathcal{O}_U(U)^n = \mathcal{O}_X(U)^n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow i^* \\ \beta \circ i & \text{Mor}(U, \mathbb{C}^n) & \xrightarrow[\sigma_U]{} & \mathcal{O}_V(V)^n = \mathcal{O}_X(V)^n \end{array}$$

Enfin $\{\sigma_U\}_{U \Subset X}$ est un isomorphisme car σ_U est bijective pour tout U d'après le théorème 2.4.

CQFD

exercice : Y, X = espaces annelés

$f : X \longrightarrow Y$ morphisme d'espaces annelés

$\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$-module et $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y$-module.

Montrer que :

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F})}$$

2.6 Définition :

Soient $X = (m, U, f_1, \ldots, f_p)$

$Y = (n, V, g_1, \ldots, g_q)$

$\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme d'espaces analytiques

$\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n) : U \longrightarrow V$ le morphisme associé canoniquement aux n fonctions analytiques $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$ (cf 2.3 a))

On dira que φ est induit par $\tilde{\varphi}$ si (1) $\Leftrightarrow$ (2) est vrai :

(1) $\forall g \in I_Y \quad \tilde{\varphi}^*(g) \in I_X$

(2) $\forall x \in X \quad \forall j \in [1, q] \quad \exists\, \alpha_j^i \in \mathcal{O}_{X,x} \quad g_j(\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_j^i f_i$

(NB : I_X = idéal $(f_1, \ldots, f_p)$ dans $\mathcal{O}_U$)

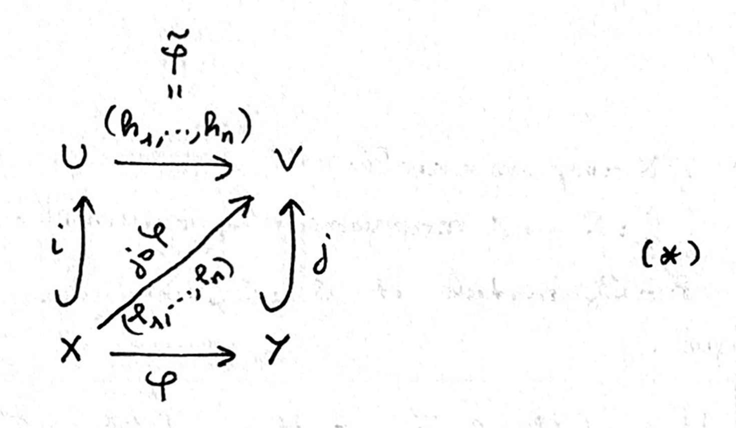
2.7 Scholie : Pour étudier un morphisme analytique $\varphi : X \longrightarrow Y$ localement en $x \in X$, on pourra supposer que

$X = (m, U, f_1, \ldots, f_p)$

$Y = (n, V, g_1, \ldots, g_q)$

et que $\varphi : X \longrightarrow Y$ est induit par un morphisme $\tilde{\varphi} : U \longrightarrow V$ associé canoniquement à n fonctions analytiques $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$.

preuve : Pour avoir $X = (m, U, f_1, \ldots, f_p)$ et $Y = (n, V, g_1, \ldots, g_q)$ il suffit de prendre des ouverts U et V tels que $\varphi(U) \subset V$ et d'utiliser la déf des espaces analytiques.



(*)

$i : X \hookrightarrow U$ est un morphisme d'espaces analytiques déterminé avec le sous-espace annelé fermé X de U défini par l'idéal $(f_1,\cdots,f_p) = \mathcal{I}_X$. On rappelle en effet que :

$$X = (m, U, f_1,\cdots,f_p) \doteq \left(X = \operatorname{Supp} \mathcal{O}_U/(f_1,\cdots,f_p) \,,\ \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_U/(f_1,\cdots,f_p)\Big|_X \right)$$

où $X = \operatorname{Supp} \mathcal{O}_U/(f_1,\cdots,f_p) = \{x \in U \,/\, f_1(x) = \cdots = f_p(x) = 0\} \subset U$

Le comorphisme i^* est obtenu par passage au quotient :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_U/(f_1,\cdots,f_p)\big|_X & \xleftarrow{\ i^*\ } & \mathcal{O}_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xhookrightarrow{\ i\ } & U \end{array}$$

car $i^* \in \operatorname{Hom}\left(\mathcal{O}_U,\ i_*\left(\mathcal{O}_U/(f_1,\cdots,f_p)\big|_X\right)\right)$

$$\text{et } i_*\left(\mathcal{O}_U/(f_1,\cdots,f_p)\Big|_X \right)(V) = \mathcal{O}_U/(f_1,\cdots,f_p)\Big|_X (V\cap X) \qquad \forall V \subseteq U$$

$$j\circ\varphi \in \operatorname{Morph}(X,V) \underset{(\text{Th } 2.4)}{=} \{ (\varphi_1,\cdots,\varphi_n) \in \mathcal{O}_X(X)^n \,/\, \forall x \ (\varepsilon_x(\varphi_1),\dots,\varepsilon_x(\varphi_n)) \in V \}$$

On écrira $j\circ\varphi \doteq (\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$ par abus

Quitte à diminuer U, on peut supposer que $\varphi_i = \dot{h}_i$ où $h_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$

On a $j\circ\varphi = (h_1,\dots,h_n)$ où i d'après la démonstration 2.4 c), donc le diagramme (*) commute.

On pose $\tilde{\varphi} = (h_1,\cdots,h_n)$.

Vérifions que φ est induit par $\tilde{\varphi} = (h_1, \dots, h_n)$:

$$\forall g \in I_Y \quad \tilde{\varphi}^*(g) \in I_X \Leftrightarrow g(h_1, \dots, h_n) \in I_X$$
$$\Leftrightarrow g(h_1, \dots, h_n)|_X = i^*(g(h_1, \dots, h_n)) = 0$$
dans $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_U / (f_1, \dots, f_p) \Big|_X$

$s = g(h_1, \dots, h_n) \in \tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{O}_V)(\Omega)$

$\tilde{\varphi}^*(s) = g(h_1, \dots, h_n) \in \mathcal{O}_U(\tilde{\varphi}^{-1}(\Omega))$

$\dot{\overline{\tilde{\varphi}^*(s)|_X}} = i^*(i^{-1}(\tilde{\varphi}^*(s)))$ car $i^* \in \mathrm{Hom}(i^{-1}\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_X)$

$= i^*((i^{-1}\tilde{\varphi}^*)(i^{-1}(s)))$

Comme $(\tilde{\varphi} \circ i)^* = i^* . i^{-1}(\tilde{\varphi}^*)$ par définition de la composée de comorphismes, et comme $s = \tilde{\varphi}^{-1}(g)$, on obtient : (*)

$\dot{\overline{\tilde{\varphi}^*(s)|_X}} = (\tilde{\varphi} \circ i)^*(i^{-1}(\tilde{\varphi}^{-1}(g)))$

or $i^{-1} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(g) = (\tilde{\varphi} \circ i)^{-1}(g) = \varphi^{-1} \circ j^{-1}(g)$ car $j \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ i$, donc :

$\dot{\overline{\tilde{\varphi}^*(s)|_X}} = (j \circ \varphi)^*(\varphi^{-1} \circ j^{-1}(g))$

$= \varphi^* . \varphi^{-1}(j^*)(\varphi^{-1} j^{-1} g)$ (cf composée de comorphismes) (*)

$= \varphi^* . \varphi^{-1}(j^*(j^{-1}(g)))$ $\binom{*}{*}$

$= 0$ car $\underbrace{j^*}_{\text{passage au quotient}}(\underbrace{j^{-1}(g)}_{\text{restriction à } Y}) = 0 \Leftarrow g \in I_Y$

donc $s \in I_X$

CQFD

(*) $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{j} V$ $\quad (j \circ \varphi)^* \in \mathrm{Hom}((j \circ \varphi)^{-1}\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X)$ est déterminé comme suit : $(j \circ \varphi)^{-1}\mathcal{O}_V = \varphi^{-1}(j^{-1}\mathcal{O}_V)$}

$\varphi^* : \varphi^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$

$j^* : j^{-1}\mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_Y \Rightarrow (\varphi^{-1}$ foncteur$)$ $\varphi^{-1}(j^*) : \varphi^{-1}(j^{-1}\mathcal{O}_V) \longrightarrow \varphi^{-1}\mathcal{O}_Y$

On prend $(j \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \varphi^{-1}(j^*)$

$\binom{*}{*}$ Explicitons le foncteur φ^{-1} dans le cas : $X \longrightarrow Y$, avec $\sigma : X \dashrightarrow \mathcal{F}$, $\beta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ (au-dessus de Y) ; $\varphi^{-1}\beta : \varphi^{-1}\mathcal{F} \to \varphi^{-1}\mathcal{G}$, $\sigma \mapsto \beta \circ \sigma$

Si σ est déterminée par une section globale de $\mathcal{F}$, disons $s \in \mathcal{F}(Y)$, notons $\sigma = \varphi^{-1}(s) = s \circ \varphi$. Alors $\varphi^{-1}(\beta)(\varphi^{-1}(s)) = \beta \circ \sigma = \beta \circ s \circ \varphi = \varphi^{-1}(\beta \circ s)$ ie $\boxed{\varphi^{-1}(\beta)(\varphi^{-1}(s)) = \varphi^{-1}(\beta \circ s)}$

2.7.1 Remarque :

Si $\tilde{\varphi} = (h_1, \dots, h_n) : U \to V$ possède la propriété d'induction, ie si $\forall g \in I_Y \quad \tilde{\varphi}^*(g) \in I_X$ alors il existe un unique morphisme $\varphi : X \to Y$ rendant le diagramme ci-contre commutatif.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & V \\ i \uparrow & & \uparrow j \\ X & \overset{\varphi}{- - \to} & Y \end{array}$$

preuve :

$x \in X \Rightarrow (h_1(x), \dots, h_n(x)) \in Y$ car $g_i(h_1(x), \dots, h_n(x)) = 0$, donc φ est défini ensemblistement.

Unicité de φ^* :

$$\mathcal{O}_V|_Y \xrightarrow{j^*} \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0 \text{ est la surjection canonique.}$$

On a :

$$(\tilde{\varphi} \circ i)^{-1}(\mathcal{O}_V) = \varphi^{-1}(j^{-1}\mathcal{O}_V) = \varphi^{-1}(\mathcal{O}_V|_Y) \xrightarrow{\varphi^{-1}(j^*)} \varphi^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

$$(\tilde{\varphi} \circ i)^* \searrow \qquad \downarrow \varphi^*$$

$$\mathcal{O}_X$$

Comme $\varphi^{-1}(j^*)$ est surjective, φ^* est unique rendant ce triangle commutatif.

Existence : par passage au quotient

$$\varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{O}_U / I_X \Big|_X = \mathcal{O}_X$$

Pour W assez petit :

$\forall r \in \varphi^{-1}(\mathcal{O}_Y)(W)$, localement $r|_{W \cap \varphi^{-1}(\Omega \cap Y)} = \varphi^{-1}(s)$ où $s \in \mathcal{O}_Y$, et $s = \dot{t}$ ou $t \in \mathcal{O}_V(\Omega)$ (quitte à prendre Ω plus petit).

On pose $\varphi^*(r|_W) \doteq i^*(i^{-1}\tilde{\varphi}^*) . i^{-1}\tilde{\varphi}^{-1}(t)$ et on vérifie que

* $\varphi^*(r|_W)$ ne dépend pas du représentant t choisi
* se recollent bien.

CQFD

Espaces projectifs

E e.v de dimension $n+1$ sur $\mathbb{C}$

$\mathbb{P}(E) = E\setminus\{0\}/\mathcal{R}$ $\quad u\mathcal{R}v \iff \exists\lambda\in\mathbb{C} \quad u=\lambda v$

$\mathbb{P}(E)$ est muni de la topologie quotient.

$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$

$$E\setminus\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}(E)$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(V) = \mathcal{O}_E(\pi^{-1}(V))$$

Proposition : $\mathbb{P}(E)$ est une variété analytique (ie un espace analytique tel que tout point possède un voisinage isomorphe à un modèle lisse. On montre alors que l'on a un isom. can avec une structure de variété anal. au sens classique

$V_1 = \pi(U_1)$ est un ouvert de $\mathbb{P}(E)$

$U_1 = E\setminus\{0\}$ avec la 1re coordonnée non nulle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)|V_1} & & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^n \\ (z_1,\dots,z_{n+1}) & \longmapsto & \left(\frac{z_2}{z_1},\dots,\frac{z_{n+1}}{z_1}\right) \end{array}$$

continue et f^* comorphisme. Alors on montre que f est un isomorphisme d'espaces annelés.

Définition

Soit X esp. analytique. On dit que X est lisse de dimension n en x si $X \simeq (n, U)$ soit isomorphe à un modèle lisse de dim n localement en x.

On dit que X est une variété si X est lisse en tout point $x\in X$. ~~On dit~~ x est dit régulier (resp. singulier) si X est lisse en x (resp. sinon).

L'ensemble des pts réguliers ~~sont~~ est un ouvert de X

Espace tangent de Zariski

$X = (n, U, f_1, \dots, f_p)$ est un modèle

$\underset{x=0}{X} \hookrightarrow \underset{0}{U}$ immersion analytique

$\vec{t} \in \mathbb{C}^n$ vecteur tangent à X en $x=0$ si $df_1(0)\vec{t} = \dots = df_p(0)\vec{t} = 0$ ie $\vec{t} \in \mathrm{Ker}\, df(0)$

$X : y^2 - x^3 = 0$ $\forall \vec{t} \in \mathbb{C}^2$ est tangent à X à l'origine $\dim_{\mathbb{C}} T_0 X = 2$

(pour un pt lisse $\dim_{\mathbb{C}} T_0 X = 1$) car $df(x,y) = (-3x^2, 2y) = 0$ en $(x,y) = (0,0)$

Plus généralement :

X esp. analytique

$T_x X$ = ens. ds classe d'équiv. des couples $(\vec{t}, \varphi)$ par $\mathcal{R}$ où :

φ cartes de X (isom. analyt), $\varphi(x) = 0$,

$(\vec{t} \in \mathrm{Ker}\, df(0), \varphi)\ \mathcal{R}\ (\vec{s} \in \mathrm{Ker}\, dg(0), \psi)$

$\Updownarrow$

$\vec{s} = d\lambda(0).\vec{t}$ où λ est induit par $\psi\varphi^{-1}$ (au sens 2.7)

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \swarrow \varphi & & \searrow \psi \\ (n, U, f_1, \dots, f_p) & \xrightarrow{\psi\varphi^{-1}} & (m, V, g_1, \dots, g_q) \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ U & \xrightarrow{\lambda} & V \end{array}$$

On vérifie que c'est indépendant de λ

Lemme : $\mathfrak{m}_x$ idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors $(T_x X)^* \simeq \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$

preuve : $\vec{\xi} \in T_x X$ $\quad \vec{\xi} = (\dot{\vec{t}, \varphi})$

$u \in \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ est représenté par un élément $\alpha \in \mathfrak{m}_0$

$\mathfrak{m}_0$ = idéal max de $\mathcal{O}_{U,0}$

$$\begin{array}{ccc} x & X & \mathcal{O}_X \ni \dot{\alpha^*} = u \\ \downarrow & \downarrow i\circ\varphi & \\ 0 & U & \mathcal{O}_U \ni \alpha \end{array}$$

$\langle \vec{\xi}, u \rangle = d\alpha(0) \cdot \vec{t}$ est indépendant du chgt de carte et de la classe (le 2-pt est trivial : si $u \in \mathfrak{m}_x^2$, $\alpha \in \mathfrak{m}_0^2 \Rightarrow d\alpha(0) = 0$)

$\alpha \rightsquigarrow \dot{\alpha^*} = u$

(NB : $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{U, \varphi(x)=0}, \mathcal{O}_{X,x})$ est surjectif car $X \simeq (n, U, f_1, \dots, f_p)$, $\mathcal{O}_U / (f_1, \dots, f_p) |_U$

$\Uparrow$

$\mathrm{Hom}(\varphi^{-1}\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_X)$)

$\downarrow$ U $\qquad \uparrow$ passage au quotient $\mathcal{O}_U$ $\shortparallel$ surjectif

$X \simeq (n, U, f_1, \dots, f_p)$ $\qquad \vec{t} \in \mathbb{C}^n \quad df(0)(\vec{t}) = 0$

$\downarrow$

U

$\mathfrak{m}_x \simeq \mathfrak{m}_0 \left(\mathcal{O}_U / (f_1, \dots, f_p) \Big|_X \right)$ $\quad$] dur : prendre la bij réciproque φ et ψ, φ_x^* ψ_x^*, $T_x^* \circ \psi_x^{*-1} = id$.

~~$\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_\varphi$~~ $\quad \alpha \in \mathcal{O}_U$ représentant de $\dot{\mathcal{O}}_U$

$u \in \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 = u_\varphi \in \dot{\mathfrak{m}}_0 / \mathfrak{m}_0^2$

$T_x X$ $\quad$ on définit alors

$\vec{\xi} = (t, \varphi)$ $\quad \boxed{\langle u, \vec{\xi} \rangle \text{ " = " } \langle d\alpha(0), \vec{t} \rangle}$ $\quad$ indép. de tout.

d'où : $\quad \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow (T_x X)^*$ $\quad$] montrer que c'est une bijection

$u \longmapsto \langle u, \cdot \rangle$.

<u>Application linéaire tangente</u> :

$$\begin{array}{ccccc} x & & X \xrightarrow{f} Y & & f(x) \\ \downarrow & & \wr \downarrow \varphi \quad\quad \psi \downarrow \wr & & \downarrow \\ 0 & & (n, U, f_1, \dots, f_p) \xrightarrow{f} (m, V, g_1, \dots, g_r) & & 0 \\ & & \downarrow \quad\quad\quad \downarrow & & \\ & & U \xrightarrow{\tilde{f}} V & & \end{array}$$

$T_x f(\vec{\xi}) = \overline{(d\dot{\tilde{f}}(0)(\vec{t}), \psi)}$ $\quad$ où $\vec{\xi} = \overline{(t, \dot{\varphi})}$

Alors : $\quad T_x(f \circ g) = T_{g(x)} f \circ T_x g$

Proposition : $X = (n, U, f_1, \dots, f_p)$
$x \in X$

$\exists$ V voisinage ouvert de x dans U
$\exists$ S sous-espace lisse de V
telo que 1) $X \cap V = $ sous-espace de S
2) $T_x X = T_x S$

ex : $(2, \mathbb{C}^2, y^2 - x^3) \Rightarrow S = \mathbb{C}^2$ en $(x,y) = (0,0)$

$df_1(0), \dots, df_p(0)$ indépendants $\Rightarrow$ X lisse en x

On peut toujours supposer
$df_1(0), \dots, df_r(0)$ indépendants (et générateurs de $df_1(0), \dots, df_p(0)$). $f_1 = \dots = f_r = 0$ définit une variété analytique lisse V (quitte à diminuer V)

$$\begin{cases} X \cap V \longrightarrow \overbrace{(n, V, f_1, \dots, f_r)}^{\text{lisse}} = S \\ T_x X = T_x S \\ X \cap V = \text{sous-espace de } (n, V, f_1, \dots, f_r) \end{cases}$$

(en bas injection
en haut : passage au quotient $(f_{r+1}, \dots, f_p)$)

$X \cap V$ = sous-espace de $(n, V, f_1, \dots, f_r)$ car c'est 1 sous-espace fermé associé à l'idéal $(\dot{f}_{r+1}, \dots, \dot{f}_p)$

cqfd

Corollaire $\varphi : X \to Y$ $\varphi(x) = y$

$\mathfrak{m}$ = idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$
$\mathfrak{n}$ = " " de $\mathcal{O}_{Y,y}$

$\varphi_x^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ induit un homomorphisme $\doteq d\varphi(x)$: $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$

Propriétés ~ :

(1) φ plongement local en x (ie $\exists$ X' vois de x dans X, $\exists$ Y' " y " Y, $\varphi : X' \to Y'$ plongement fermé (*))

(2) φ_x^* surjective

(3) $d\varphi(x)$ surjective

(4) $T_x \varphi$ injective

(*) $\varphi : X' \to Y'$ plongement fermé si $X' \underset{\sim}{\overset{\text{ana}}{\longrightarrow}} Z' \hookrightarrow Y'$ (isomorph, Z' = sous-espace fermé de Y')

preuve :

(1) ⇒ (2) $X' \simeq Z' \hookrightarrow Y'$

f_x^* surjective (cf inclusion d'1 sous esp. fermé)

(2) → (3) $\left\{ \begin{array}{l} f_x^* \text{ surjective} \\ (f_x^*)^{-1} \mathcal{M} \subset \mathcal{N} \end{array} \right.$

(3) ⇒ (4) $d\varphi(x)$ est la transposée de $T_x\varphi$

(4) ⇒ (1)

localement, on injecte X dans un sous esp lisse

$$\begin{array}{ccccc} (f_1,\dots,f_p) & X & \hookrightarrow & U & \\ & \varphi \downarrow & & \downarrow \tilde\varphi & \downarrow \\ & Y & \hookrightarrow & V & (x,0) \\ (g_1,\dots,g_r) & & & & \end{array}$$

$T_xX = T_xU$ (cf Prop. précédente)

$T_yY = T_yV$ (Scholie)

$T_x\varphi = T_x\tilde\varphi$ par déf, donc

$\tilde\varphi$ immersion local ⇒ φ plongement local

$\tilde\varphi$ immersion en restreignant U et V ; donc $\tilde\varphi(x) = (x,0)$

Hyp : $g_i(x,0) \in (f_1, \dots, f_p)$

$$\mathcal{O}_x \simeq \left(\mathcal{O}_V \big/ g_i(x,y), y, f(x) \right) \Big| \text{Supp}$$

car : (x,y) est bijective car $\left\{ \begin{array}{l} g_i(x,y) = 0 \\ y = 0 \\ f(x) = 0 \end{array} \right.$ ⇕ $\boxed{f(x) = 0}$ (x,y)

abus : $f(x) = [f(x)]$ ⇕ $f_i(x) = 0 \ \forall i$

a) $X \longrightarrow \text{Supp}$ $\mathcal{O}_V \big/ g_i(x,y), y, f(x)$ (inclusion de sous esp. fermé) Y

$x \longmapsto (x,0)$

b) ex : montrer la bij. au niveau du comorphisme

ex : $\left(\frac{2}{3}, \mathbb{C}^2, y\right) \simeq (1, \mathbb{C})$ (cas où $f = 0$)

3. Produits fibrés d'espaces analytiques

Soient X et Y deux espaces analytiques. On définit le produit $X \times Y$ et le produit fibré $X \times_S Y$ lorsque la situation suivante nous est donnée :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

par les propriétés universelles :

(PUP) Le produit $X \times Y$ est donné avec les 2 projections π_1 et π_2, et pour tout espace analytique A, pour tous morphismes s et t de A dans X et de A dans Y respectivement, il existe une et une seule factorisation de s et t à travers $X \times Y$, ie :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & X \\ t \downarrow & \searrow & \uparrow \pi_1 \\ Y & \xleftarrow{\pi_2} & X \times Y \end{array}$$

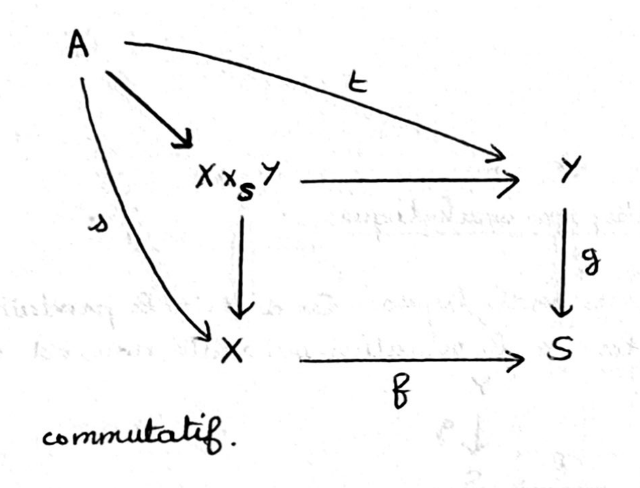
(PUPF) Le produit fibré $X \times_S Y$ de X et Y au dessus de S est la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \dashrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

dans la catégorie des espaces analytiques, qui vérifie la propriété universelle suivante :

Pour tout diagramme commutatif $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y \\ s \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$ il existe une flèche →

et une seule rendant le diagramme :



commutatif.

3.1 Théorème : Dans la catégorie des espaces analytiques, le produit et le produit fibré existent, et le foncteur de la catégorie des espaces analytiques dans celle des espaces topologiques qui à chaque espace analytique fait correspondre l'espace topologique sous-jacent, commute au produit fibré.

NB : Ce th. a l'air faux dans la catégorie des espaces annelés.

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs lemmes : les lemmes 3.1.1 à 3.4 montrent l'existence du produit $X \times Y$. De là on déduit l'existence de $X \times_S Y$.

lemme 3.1.1 : Le produit $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ existe dans la catégorie des espaces analytiques.

preuve : Remarquons, avant de commencer, que $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ sera le produit fibré au dessus d'un point :

Si $S = \cdot =$ point

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C}^m \\ & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \cdot \end{array}$$

le problème universel du produit fibré est le même que le problème universel du produit, puisque tous les carrés au dessus de $S = \cdot$ seront commutatifs.

D'après le Th 2.4 p49, Mor $(X, \mathbb{C}^n) = (\mathcal{O}_X(X))^n$. On peut donc définir φ_1 et φ_2 dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+m} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathbb{C}^m \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \cdot \end{array}$$

en prenant :
φ_1 associé à $(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}}(\mathbb{C}^{n+m})$, ie $\varphi_1^*(z_i) = z_i$ $(1 \leq i \leq n)$
φ_2 associé à $(z_{n+1}, \dots, z_{n+m}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}}(\mathbb{C}^{n+m})$, ie $\varphi_2^*(z_{n+i}) = z_{n+i}$ $(1 \leq i \leq n)$

Comme dans la preuve 2.4 p49 d), on constate que le morphisme d'espaces topologiques sous-jacent à φ_1 est :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 : & \mathbb{C}^{n+m} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (a_1, \dots, a_{n+m}) & \longmapsto & (a_1, \dots, a_n) \end{array}$$

et que le comorphisme est : (cf preuve 2.4 p49 b)) :

$$\varphi_1^*(a(z_1, \dots, z_n)) = a(z_1, \dots, z_n)$$

<u>Vérifions que $(\mathbb{C}^{n+m}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}})$ est le produit $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$</u> :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\theta_2} & \mathbb{C}^m \\ \theta_1 \downarrow & \overset{\theta}{\searrow} & \uparrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^n & \xleftarrow{\varphi_1} & \mathbb{C}^{n+m} \end{array}$$

L'existence et l'unicité au niveau des e.t. sous-jacents est évidente. Seuls les comorphismes créent des problèmes :

D'après le Th. 2.4 p49,
θ_1 est caractérisé par $(\theta_1^*(z_1), \dots, \theta_1^*(z_n)) \in \mathcal{O}_A(A)^n$
θ_2 est caractérisé par $(\theta_2^*(z_{n+1}), \dots, \theta_2^*(z_{n+m})) \in \mathcal{O}_A(A)^m$

<u>Unicité de θ</u> : Si le diagramme ci-dessus commute,

$$\begin{cases} \theta_1^*(z_i) = \theta^*(z_i) & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ \theta_2^*(z_{n+i}) = \theta^*(z_{n+i}) & \text{pour } 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

donc θ est unique.

(on vérifiera que $\theta_1^*(z_i) = (\varphi_1 \circ \theta)^*(z_i) = (\varphi_{1*}\theta^*)(\varphi_1^*(z_i))$
$= \varphi_{1*}\theta^*(z_i)$
$= \theta^*(z_i)$

le dernier point étant la déf. de $\varphi_* f : \varphi_*\mathcal{F} \to \varphi_* \mathcal{G}$ quand $f : X \to Y$, $\mathcal{F}$ faisceau de base X et $\mathcal{G}$ de base Y)

<u>Existence de θ</u> : On définit θ par les $n+m$ fonctions de $\mathcal{O}_A(A)^{n+m}$ précédentes, ie $\theta_1^*(z_i)$ $(1 \le i \le n)$ et $\theta_2^*(z_{n+j})$ $(1 \le j \le m)$

Le diagramme est bien commutatif :

$$(\varphi_1\theta)^*(z_i) = (\varphi_{1*}\theta^*)(\varphi_1^*(z_i)) = \varphi_{1*}\theta^*(z_i) = \theta^*(z_i) \doteq \theta_1^*(z_i)$$

donc (unicité du Th. 2.4 p49) $(\varphi_1\theta)^* = \theta_1^*$

De m̂ pour $\varphi_2\theta$.

CQFD

<u>lemme 3.1.2 :</u>

X, Y espaces analytiques qui possèdent un produit $Z = X \times Y$

X', Y' sous-espaces analytiques de X, resp. Y. On peut supposer, plus générale- lement, que $i : X' \hookrightarrow X$ (resp. $j : Y' \hookrightarrow Y$) est une immersion.

Alors le produit $X' \times Y'$ existe.

De plus : i et j immersions ouvertes $\Longrightarrow$ $i \times j : X' \times Y' \to X \times Y$ immersion ouverte

i et j " fermées $\Longrightarrow$ " " " fermée.

<u>Rappel</u> : On dit que $i : X' \to X$ est une <u>immersion ouverte</u> (<u>resp. fermée</u>, resp. <u>localement fermée</u>) si

$X' \simeq X'' \hookrightarrow X$ et X'' sous-esp. analytique ouvert de X

(resp. si $X' \simeq X'' \hookrightarrow X$ et X'' fermé de X

resp. si $X' \simeq X'' \hookrightarrow X''' \hookrightarrow X$, où X'' fermé de X''' et X''' ouvert dans X)

On dit que $i : X' \to X$ est une <u>immersion</u> (ou encore un <u>plongement</u>) si $X' \simeq X'' \hookrightarrow X$.

<u>sous-lemme α)</u> : Si $Z = X \times Y$ et si Y est un sous-espace fermé de X, toute application $g : Z \to X$ se factorise de manière unique à travers Y ssi

$$\begin{cases} g(Z) \subset Y \\ g^*(g^{-1}\mathcal{J}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & X \\ & {\scriptstyle\theta}\searrow & \nearrow{\scriptstyle i} \\ & Y & \end{array}$$

preuve :

<u>nécessaire</u> : Si la factorisation a lieu, $g(Z) \subset Y$ et :

$$g^* = (i \circ \theta)^* = \theta^* \circ (\theta^{-1} i^*)$$

Mais :

$$i^* \in \mathrm{Hom}(i^{-1}\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) = \mathrm{Hom}\left(\mathcal{O}_X|_Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{J}\big|_Y\right)$$

$$\text{et } \mathcal{O}_X/\mathcal{J}\big|_Y = \mathcal{O}_X|_Y / \mathcal{J}|_Y = i^{-1}\left(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}\right)$$

$$\theta^{-1} i^* \in \mathrm{Hom}\left(\theta^{-1}i^{-1}\mathcal{O}_X, \theta^{-1}i^{-1}\left(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}\right)\right) = \mathrm{Hom}\left(g^{-1}\mathcal{O}_X, g^{-1}\left(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}\right)\right)$$

$$= \mathrm{Hom}\left(g^{-1}\mathcal{O}_X, g^{-1}\mathcal{O}_X / g^{-1}\mathcal{J}\right)$$

et $\theta^{-1} i^*$ n'est autre que le passage au quotient dans cette identification, donc :

$$g^*(g^{-1}(\mathcal{J})) = \theta^* \circ \left(\theta^{-1} i^* (g^{-1}\mathcal{J})\right) = \theta^*(0) = 0$$

<u>suffisance</u> : θ sous-jacent est clair, ensemblistement. Existe-t'il θ^* qui fasse commuter le diagramme sous l'hypothèse $g^*(g^{-1}\mathcal{J}) = 0$?

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Z & \xleftarrow{g^*} & g^{-1}\mathcal{O}_X \\ & \swarrow & \\ g^{-1}\mathcal{O}_X/g^{-1}\mathcal{J} & & \end{array}$$

$\theta^{-1} i^*$ = passage au quotient } ici θ est considérée <u>seulement</u> ensemblistement

C'est vrai : on peut toujours trouver $\theta^* : g^{-1}\mathcal{O}_X/g^{-1}\mathcal{J} \to \mathcal{O}_Z$ qui fasse commuter ce diagramme.

C'est général :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xleftarrow{g^*} & \mathcal{F} \\ {\scriptstyle\theta^*}\nwarrow & \swarrow & \\ \mathcal{F}/\mathcal{F}' & & \end{array}$$

et $g^*\mathcal{F}' = 0$ } $\Rightarrow \theta^*$ existe.

sous-lemme β) : Si Y est un fermé de X, alors le produit fibré $Z \times_X Y$ existe :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow j \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

(Z esp. anal. quelconque, ici)

preuve : $\mathcal{I}$ = idéal définissant Y

Z' = sous-espace analytique de Z défini par l'idéal $f^*(f^{-1}\mathcal{I})$

où $f^* : f^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z$ (exemple : si Z et X sont lisses et si Y est défini par les fonctions $g_i(x) = 0$, $f^*(f^{-1}\mathcal{I})$ est défini par les fcts $g_i \circ f(x) = 0$)

$$\begin{array}{ccc} Z' & \overset{h}{\dashrightarrow} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

$$(f\circ i)^*((f\circ i)^{-1}\mathcal{I}) = 0 \qquad (1)$$

puisque $(f\circ i)^*((f\circ i)^{-1}\mathcal{I}) = i^* \circ (i^{-1}f^*)(i^{-1}(f^{-1}\mathcal{I}))$
$\underset{(*)}{=} i^*(i^{-1}(f^* f^{-1}(\mathcal{I}))) = 0$ car $i^*(i^{-1}(\ ))$ est le passage au quotient.

(1) permet d'appliquer le sous-lemme α) : $f\circ i$ se factorise de manière unique à travers Y. Notons h cette factorisation.
Il faut maintenant vérifier que $Z' = Z \times_X Y$ en retournant au problème universel :

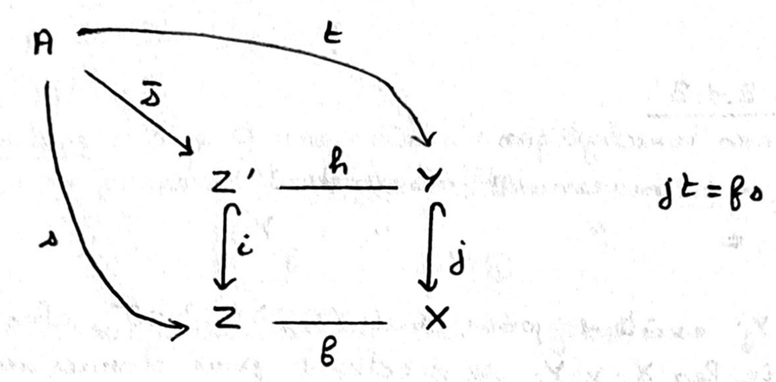
(*) Notons que $(i^{-1}f^*)(i^{-1}(f^{-1}\mathcal{I})) = i^{-1}(f^* f^{-1}\mathcal{I})$, ce qui peut se voir de la manière suivante :

$$f^{-1}\mathcal{O}_X \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_Z$$

donc

$$f^{-1}\mathcal{I} \xrightarrow{f^*} f^* f^{-1}\mathcal{I} \to 0$$ est une suite exacte de morphismes de faisceaux d'anneaux. Le foncteur exact i^{-1} donne :

$$i^{-1}f^{-1}\mathcal{I} \xrightarrow{i^{-1}f^*} i^{-1}(f^* f^{-1}\mathcal{I}) \to 0$$ d'où l'égalité cherchée.



$jt = fs$

On a $(jt)^*((jt)^{-1}\mathcal{J}) = t^*(t^{-1}j^*)(t^{-1}j^{-1}\mathcal{J})$
$= t^* t^{-1}(j^* j^{-1}\mathcal{J}) = 0$ car $j^* j^{-1}\mathcal{J} = 0$ (passage au quotient)

Donc $(fs)^*((fs)^{-1}\mathcal{J}) = 0 \Rightarrow s^*(s^{-1}f^*)(s^{-1}f^{-1}\mathcal{J}) = 0$
$\Rightarrow s^*.s^{-1}(f^*(f^{-1}\mathcal{J})) = 0$ de sorte que l'on puisse factoriser s de façon unique à travers le sous-espace fermé Z'. (cf sous-lemme α)). On obtient le morphisme $\bar{s}$.

<u>Il reste à vérifier que $h \circ \bar{s} = t$</u> : On a :

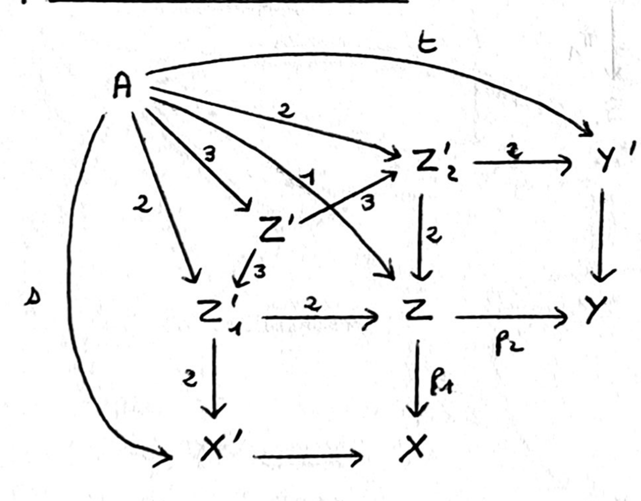
$jh\bar{s} = fi\bar{s} = fs = jt \Rightarrow jh\bar{s} = jt$

et l'on ne peut factoriser jt à travers le sous-espace fermé Y que d'une façon unique (cf sous-lemme α)), donc $h\bar{s} = t$.

CQFD

NB : On peut réécrire ces sous-lemmes pour un ouvert à la place de Y.

<u>preuve du lemme 3.1.2</u> :



étapes :

1 : Z est le produit $X \times Y$ (P.U.P)

2 : X' fermé de X et lemme β), donnent $Z'_1 = X' \times_X Z$ existe.
De même pour Y'.

3 : $Z' = Z'_1 \times_Z Z'_2$ existe car Z'_1 est fermé dans Z et lemme β.

On vérifie que $Z' = X' \times Y'$.

lemme 3.1.3 :

X, Y = espaces analytiques
$\{X_i\}_{i\in I}$ = recouvrement ouvert de X
$\{Y_j\}_{j\in J}$ = " " Y

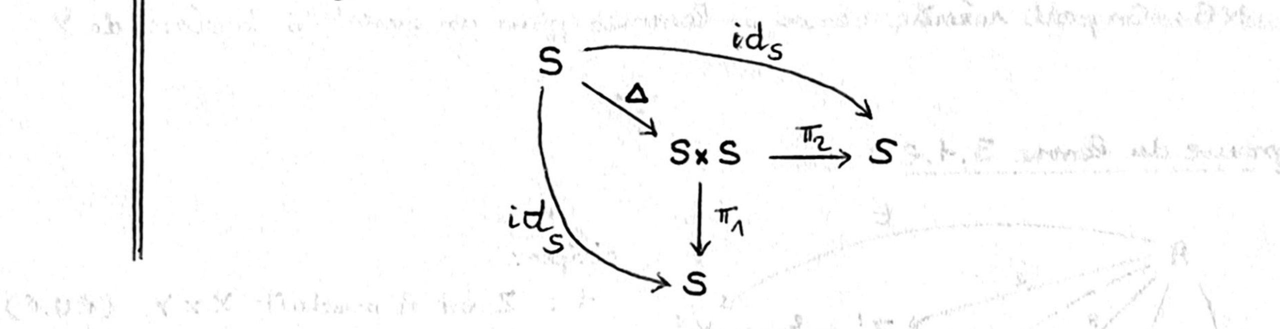
Si $X_i \times Y_j$ existent pour tout $(i,j) \in I\times J$, alors le produit $X\times Y$ existe (ie les $X_i \times Y_j$ se recollent pour donner un espace analytique global)

NB : localement, si X est défini par $(n, U, f_1, \cdots, f_p)$
Y " $(m, V, g_1, \cdots, g_s)$

on a : $X\times Y = (n+m, U\times V, f_1(x), \cdots, f_p(x), g_1(y), \cdots, g_s(y))$

On peut montrer que le produit existe localement avec cette définition, et recoller le tout, mais on utilise alors des propriétés fines des esp. analytiques. Les sous-lemmes α) et β) n'utilisaient que des espaces annelés.

3.2 Définition : Soit S un espace analytique. Le morphisme diagonale $\Delta : S \to S\times S$ est le morphisme d'espaces annelés obtenu grâce à la PUP dans le diagramme :



3.3 Proposition : Soit $\mathcal{G}$ une catégorie où le produit existe (donc la diagonale Δ). Le problème du produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad ①$$

est analogue au problème du produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & & \downarrow \Delta \\ X\times Y & \longrightarrow & S\times S \end{array} \quad ②$$

preuve : A une situation

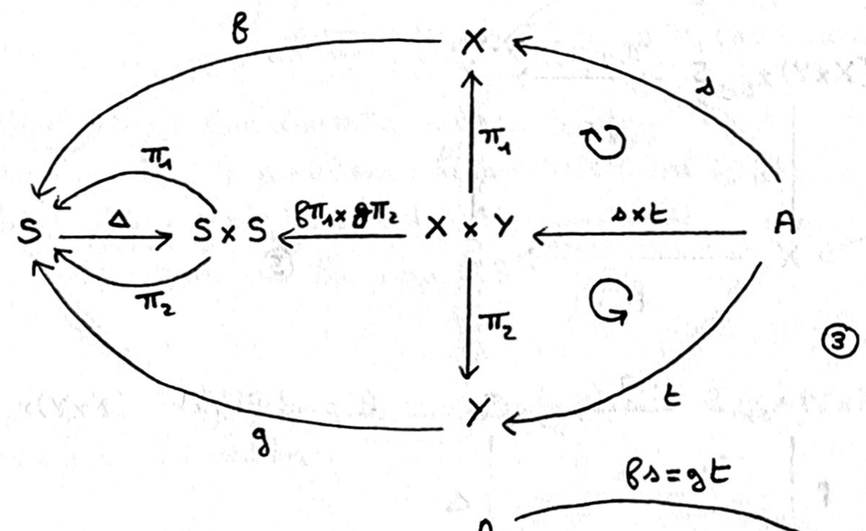
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & Y \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad ①$$

nous allons faire correspondre une situation du type :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \Delta \\ X\times Y & \longrightarrow & S\times S \end{array} \quad ②$$

comme suit.

L'utilisation, 3 fois de suite pour s et t, $f\pi_1$ et $g\pi_2$, id_S, de la PUP donne le diagramme :



d'où la situation :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{fs = gt} & S \\ {\scriptstyle s\times t}\downarrow & & \downarrow \\ X\times Y & \xrightarrow[f\pi_1\times g\pi_2]{} & S\times S \end{array} \quad ④$$

On montre que :
$\Delta f s = (f\pi_1 \times g\pi_2)(s\times t)$
en utilisant la PUP dans la catégorie $\mathcal{G}$

En effet :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{gt = f s} & S \\ {\scriptstyle fs}\downarrow & \searrow^{(f\pi_1 \times g\pi_2)(s\times t)}_{\Delta f s} & \uparrow{\scriptstyle \pi_2} \\ S & \xleftarrow[\pi_1]{} & S\times S \end{array} \qquad (*)$$

et les 2 morphismes diagonaux font commuter le diagramme. Vraiment :

$\pi_1(\Delta f s) = fs$ car $\pi_1 \Delta = id_S$ (cf PUP)

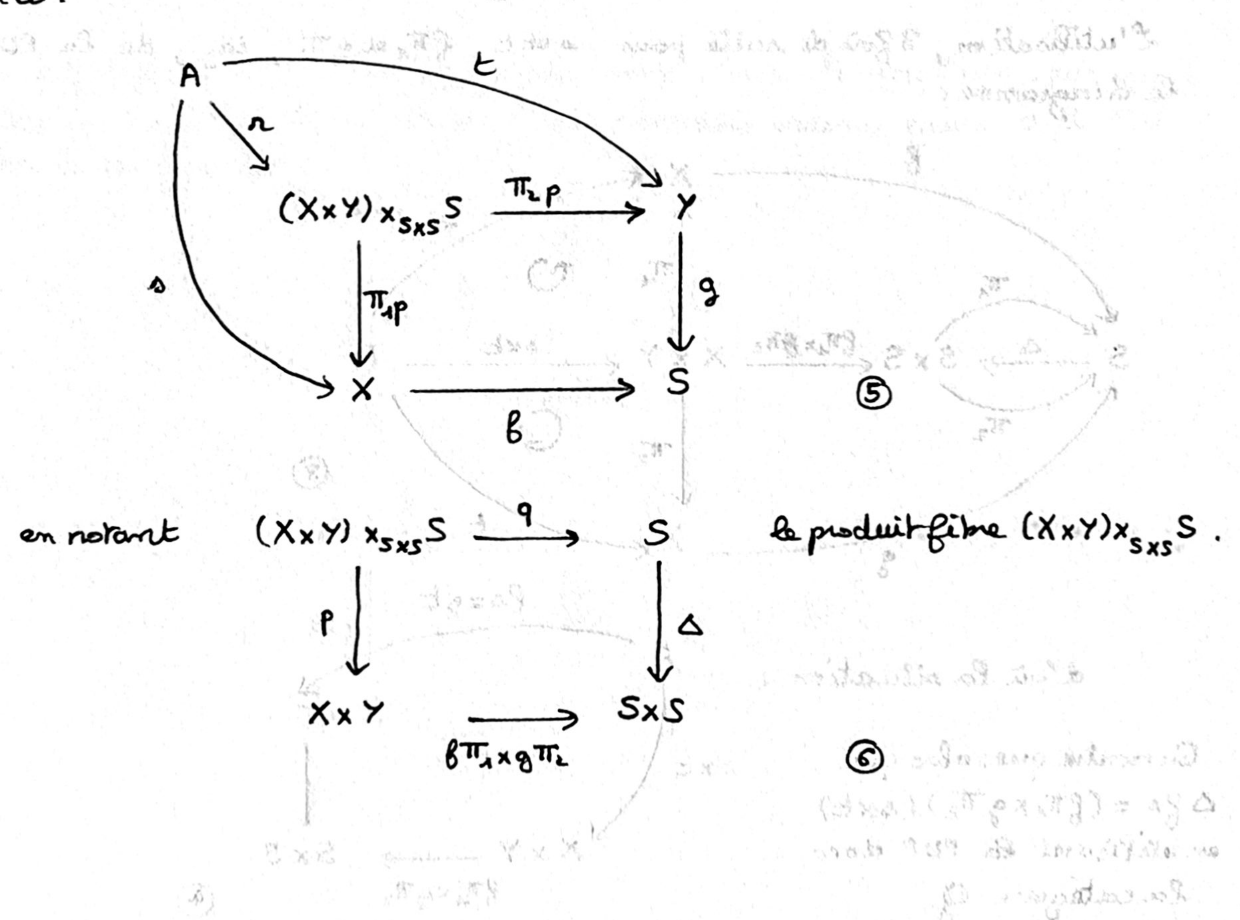
et

$$\begin{aligned} \pi_2(f\pi_1 \times g\pi_2)(s\times t) &= g\pi_2(s\times t) \quad \text{car } \pi_2(f\pi_1\times g\pi_2) = g\pi_2 \ \text{(cf PUP)} \\ &= g(\pi_2(s\times t)) \\ &= gt \quad \text{car } \pi_2(s\times t) = t \ \text{(cf PUP)} \end{aligned}$$

De même, $\pi_1(f\pi_1\times g\pi_2)(s\times t) = fs$ et $\pi_2(\Delta f s) = gt$.
Le diagramme (*) et l'unicité de la solution du PUP pour $S\times S$ et les morphismes $fs : A \to S$ implique que

$$\Delta f s = (f\pi_1 \times g\pi_2)(s\times t) .$$

Cela étant, si le produit fibré $(X\times Y)\times_{S\times S} S$ existe, considérons une situation ① où $fs = gt$ et associons lui la situation ② précisée en ④ : on a :



Vérifions que ⑤ définit bien le produit fibré $X \times_S Y$, à savoir :

$$X \times_S Y \doteq (X \times Y) \times_{S \times S} S$$

1°/ Le carré de ⑤ est commutatif, i.e. $f\pi_1 p = g\pi_2 p$:

On a $\Delta q = (f\pi_1 \times g\pi_2) p \Rightarrow \pi_1 \Delta q = \pi_1 (f\pi_1 \times g\pi_2) p$
or $\pi_1 \Delta = id_S$ et $\pi_1 (f\pi_1 \times g\pi_2) = f\pi_1$ d'après la PUP appliquée 2 fois dans ③, donc :

$$q = f\pi_1 p$$

Il faut montrer que $q = g\pi_2 p$. Ce sera vrai si $g \circ \pi_2 \circ p$ fait commuter le diagramme ⑥ à la place de q. On a :

$$\Delta g \pi_2 = (f\pi_1 \times g\pi_2) \quad \text{d'après la PUP dans ③}$$

donc :

$$\Delta g \pi_2 p = (f\pi_1 \times g\pi_2) p$$

ce qui prouve 1°/.

2°/ s et t de ⑤ se factorisent à travers $X \times_S Y$:
Il faut voir si :

$$\begin{cases} \pi_2 p r = t \\ \pi_1 p r = s \end{cases}$$

C'est trivial : $\begin{cases} pr = s \times t \Rightarrow \pi_2 pr = \pi_2 (s \times t) = t & \text{(cf PUP dans ③)} \\ pr = s \times t \Rightarrow \pi_1 pr = \pi_1 (s \times t) = s & \text{(" ")} \end{cases}$

Conclusion : On a montré que si le problème du produit fibré ② était résolu, alors le problème du produit fibré ① le serait canoniquement. La réciproque, vraie, est laissée en exercice.

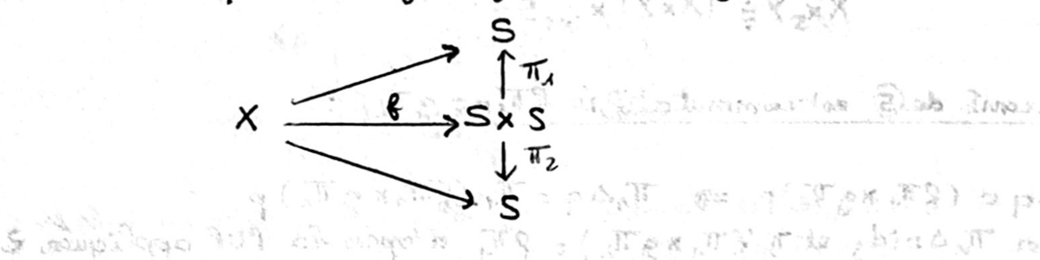
Ce qui prouve la prop. 3.3.

3.4 Lemme : S = espace analytique. Le morphisme diagonal $S \xrightarrow{\Delta} S \times S$ est une immersion.

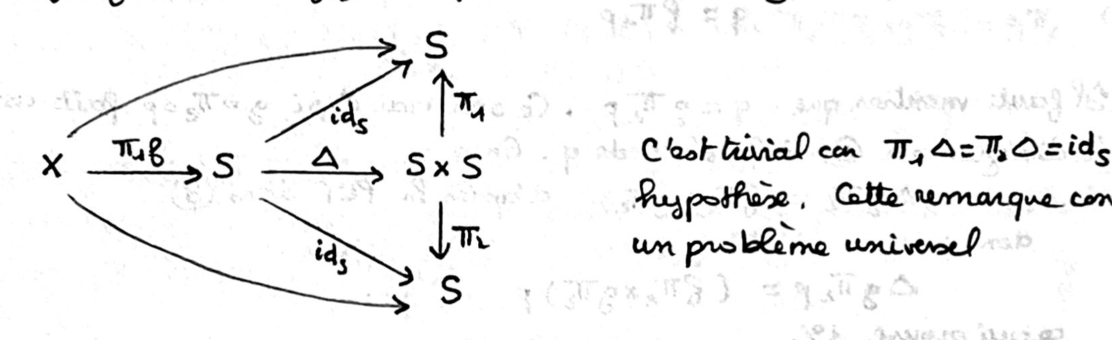
Conséquence : le lemme 3.4 et la prop. 3.3 permettent d'appliquer le sous-lemme β) et de conclure à l'existence du produit fibré de 2 espaces analytiques quelconques X et Y, ce qui termine la démonstration du Théorème 3.1.

<u>preuve du lemme 3.4</u> :

Faisons une remarque : Si $\pi_1 f = \pi_2 f$ dans le diagramme :



alors f se factorise de façon unique à travers la diagonale, ie :



C'est trivial car $\pi_1 \Delta = \pi_2 \Delta = id_S$ par hypothèse. Cette remarque constitue un problème universel

a) <u>Cas où $S = \mathbb{C}^n$</u>

f est alors définie par $\begin{cases} f^*(z_i) & 1 \leq i \leq n \\ f^*(z_i) & n+1 \leq i \leq 2n \end{cases}$

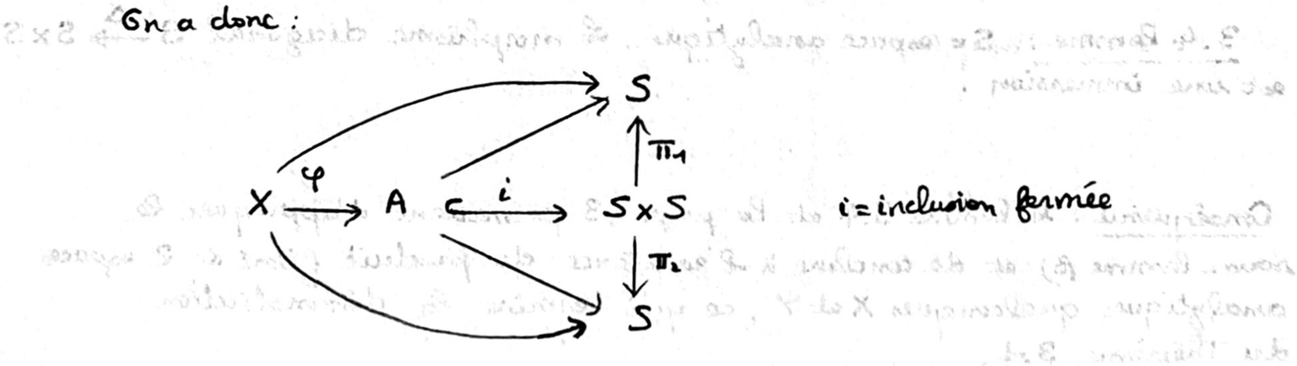
et $\pi_1 f = \pi_2 f \Leftrightarrow f^*(z_i) = f^*(z_{i+n})$

$$\begin{array}{ccc} & & S \quad (z_{n+1}, \dots, z_{2n}) \\ & \nearrow & \uparrow \pi_2 \\ X & \xrightarrow{f} & S \times S \quad \text{variables } (z_1, \dots, z_{2n}) \\ & \searrow & \downarrow \pi_1 \\ & & S \quad (z_1, \dots, z_n) \end{array}$$

Alors f se factorise de façon unique à travers $A \doteqdot \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n / (z_i - z_{i+n}) \Big|_{Supp}$

d'après le sous-lemme α) et puisque $f^*(z_i - z_{i+n}) = 0 \quad \forall i \in [1, n]$. .

On a donc :



Par suite $A \simeq S$ ~~d'après~~ puisque solution du même problème universel de la remarque ci-dessus.

b) $S \hookrightarrow S \times S$ est une immersion localement fermée quand S n'est pas une variété : utiliser les lemmes 3.1.2 et α), β)

3.5 Signification du produit fibré en coordonnées locales

$$\begin{array}{ccc} & & (m, V, g_1, \dots, g_s) \\ & & \downarrow \psi \\ (n, U, f_1, \dots, f_p) & \xrightarrow{\varphi} & (\ell, W, \rho_1, \dots, \rho_n) \end{array}$$

$$\left(m+n, U\times V, f(x), g(y), \overbrace{\rho\varphi(x), \rho\psi(y), \varphi(x)=\psi(y)}^{(\varphi\times\psi)^*(\rho(x),\rho(y),x=y)}\right) \longrightarrow \left(W\times W, \rho_1(x), \dots, \rho_n(x), \rho_1(y), \dots, \rho_n(y), \underbrace{x=y}_{\text{ie } z_i = z_{i+n}}\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

diagonale $S \simeq A \hookrightarrow S\times S$
On identifie S à A : S est donc un sous-esp. anal. fermé de $S\times S$.

$$(m+n, U\times V, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_s) \xrightarrow{\varphi\times\psi} (\ell+\ell, W\times W, \rho_1(x), \dots, \rho_n(x))$$

d'où :

$$\begin{array}{ccc} (m+n, U\times V, f(x), g(y), \rho\varphi(x), \rho\psi(y), \varphi(x)=\psi(y)) & \longrightarrow & (m, V, g(y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (m, U, f(x)) & \xrightarrow{\varphi} & (W, \rho) \end{array}$$

4. Germes de sous-espaces analytiques pointés :

(X,a) = espace analytique pointé
$E(a) = \{ (U,Y) \ / \ U$ voisinage ouvert de a dans X et Y sous-espace analytique fermé de $U \}$

On définit la relation d'équivalence $\sim$ dans $E(a)$ par :
$(U,Y) \sim (V,Z) \iff \exists W$ voisinage ouvert de a, $W \subset U \cap V$ et $Y|_W = Z|_W$
$E(a)/_\sim$ est l'ensemble des germes de sous-espaces analytiques de X en a.
On note Y_a le germe de sous-espace analytique induit par Y en a et $\{Y_a\}$ le germe d'espaces analytiques sous-jacent.

L'application :

$$\begin{array}{ccc} E(a) & \longrightarrow & \mathbb{C}\text{-algèbres quotients de } \underline{O}_{X,a} \\ (U,Y) & \longmapsto & \underline{O}_{Y,a} \\ \downarrow & \nearrow \ \xi \text{ bijective} & \\ Y_a & & \end{array}$$

passe au quotient et définit une bijection ξ entre l'ensemble des germes d'espaces analytiques en a et les $\mathbb{C}$-algèbres quotients de $\underline{O}_{X,a}$: En effet :

1) ξ est surjective :
Si $O_{X,a}/J_a$ est une $\mathbb{C}$-algèbre quotient de $O_{X,a}$, comme $O_{X,a}$ est noethérien, donc $J_a = (f_{1,a}, \dots, f_{p,a})$.
$\exists (f_1, \dots, f_p)$, $f_i \in O_X(U)$, U ouvert contenant a, tels que

germe de (f_i) en $a = f_{i,a}$
On prend $J = (f_1, \dots, f_p)$ pour définir Y sur U.

2) ξ est injective : Soient (U,Y) et $(U,Z) \in E(a)$.

$$\underline{O}_{Y,a} = \underline{O}_{Z,a} \iff O_{X,a}/J_a = O_{X,a}/L_a \qquad (1)$$

où :
J = faisceaux d'idéaux de $O_X|_U$ définissant Y,
L = " " " Z.

(1) $\iff J_a = L_a$, puisque (1) est une égalité et non un isomorphisme.

J_a et L_a sont de type fini (car $\mathcal{O}_{X,a}$ noethérien). Donc, quitte à restreindre U, il existe :

$f_1, \dots, f_p \in J(U)$ système de générateurs de $J(U)$
$l_1, \dots, l_s \in L(U)$ " " $L(U)$

Par hypothèse, $\exists \lambda_j^{(i)} \in \mathcal{O}_{X,a}$ / $f_{i,a} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j^{(i)} l_{j,a}$ donc, quitte à restreindre U, on a

$$f_i = \sum \lambda_j^{(i)} l_j \quad \text{où} \begin{cases} \lambda_j \in \mathcal{O}_X(U) \\ l_j \in L(U) \\ f_i \in J(U) \end{cases}$$

donc $J(U) \subset L(U)$.
De la même façon, $J(U) = L(U)$. Alors $J = L$:

<u>Lemme</u> : J, L faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}_X|_U$, J (resp L) engendré par des sections globales dans $L(U)$ (resp $J(U)$) (ie $\exists l_1, \dots, l_s \in L(U)$ $\forall f \in J_x$ $\exists \lambda_{i,x} \in \mathcal{O}_{X,x}$ $f = \sum_{i=1}^{s} \lambda_{i,x} l_{i,x}$ où $l_{i,x}$ désigne le germe induit par l_i en x).
Alors $J = L$.

4.1 Définition :

Soit $(U, Y) \in E(a)$ et Y_a le germe induit par (U,Y) en a. On dit que le germe de sous-espaces analytiques Y_a est <u>réduit</u> (resp. <u>intègre</u>) si $\mathcal{O}_{Y,a}$ est un anneau réduit (resp. intègre).

<u>Rappel</u> : Un anneau A est réduit si $\sqrt{0} = 0$, ie si $\forall x \in A$ $x^n = 0 \Rightarrow x = 0$.

4.2 Proposition :

(X, a) = espace analytique pointé
N = nilradical de $\mathcal{O}_{X,a}$
$(X_a)_{red} \doteq$ germe en a de l'espace analytique $\dfrac{\mathcal{O}_X|_U}{N}$ (où l'on a grossi N de façon à avoir un faisceau d'idéaux, $N_{,a} \subseteq \mathcal{O}_{X,a}$ étant de type fini ; cf preuve de "$\bar{F}$ est surjective" p62 verso)
Alors :
Les germes d'espaces topologiques sous-jacents à X_a et $(X_a)_{red}$ sont les mêmes :

$$\{X_a\} = \{(X_a)_{red}\}$$

preuve :

$$X_a \leftsquigarrow X$$

$(X_a)_{red} \leftsquigarrow (U, Y)$ où Y fermé de X défini par $g_1, \dots, g_p$,

où $N = (g_{1,a}, \dots, g_{p,a})$ et $g_i \in \mathcal{O}_X(U)$ $(1 \leq i \leq p)$.
N est le nilradical de $\underline{\mathcal{O}}_{X,a}$, donc pour tout i il existe k_i tel que $g_{i,a}^{k_i} = 0$. En réduisant l'ouvert U, si nécessaire, on aura $g_i \in \mathcal{O}_X(\bar{U})$ et $g_i^{k_i} = 0$
Et $(X_a)_{red} \leftsquigarrow (\bar{U}, Y)$

Quel est l'espace topologique sous-jacent à $(\bar{U}, Y)$? C'est (*)

$$Y = \{x \in \bar{U} \,/\, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$$

$\overset{(+)}{=} \{x \in \bar{U} \,/\, g_1^{k_1}(x) = \dots = g_p^{k_p}(x) = 0\} = \bar{U}$ d'après la définition (le choix de) $\bar{U}$. L'égalité (+) provient de :
$g_i^{k_i} = 0 \Rightarrow g_i(x) = \varepsilon_x(g_i)$ où $\varepsilon_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \simeq \mathbb{C}$ corps, vérifie :
$\varepsilon_x(g_i^{k_i}) = 0 \Rightarrow \varepsilon_x(g_i) = 0 \Leftrightarrow g_i(x) = 0$.
On a bien $Y = \bar{U}$.
CQFD

(*) <u>Remarque</u> : Si $U \subset X$, $g_1, \dots, g_p \in \mathcal{O}_X$ définissent Y, alors le sous-espace topologique de U sous-jacent à Y est
$$Y = \{x \in U \,/\, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$$

<u>4.3 Proposition</u> :
(X, a) espace analytique pointé
I, J idéaux de $\underline{\mathcal{O}}_{X,a}$, épaissis sur un voisinage U de a.
Y_a = germe d'espace analytique défini par I
Z_a = " " " J
$Y_a \cup Z_a \doteq$ " " " $I \cap J$

Alors :

$$\boxed{\{Y_a \cup Z_a\} = \{Y_a\} \cup \{Z_a\}}$$

preuve :

U voisinage ouvert de a /
$f_1, \dots, f_p \in I(U)$ engendrent $I(U)$
$g_1, \dots, g_s \in J(U)$ " $J(U)$

$\forall x \in \{Y_a \cup Z_a\}$ $\forall f \in I \cap J$ $f(x) = 0$ par définition du support de $Y_a \cup Z_a$
Cela étant, si $x \notin \{Y_a\}$, $\exists i$ $f_i(x) \neq 0$. Si de plus $x \in \{Y_a \cup Z_a\}$, on a :

$$\forall i, j \quad f_i g_j \in I \cap J \Rightarrow f_i(x) g_j(x) = 0$$

$$\Rightarrow g_j(x) = 0 \quad \forall j \Leftrightarrow x \in \{Z_a\}$$

Donc $\{Y_a \cup Z_a\} \subset \{Y_a\} \cup \{Z_a\}$
La réciproque est triviale.

CQFD

Remarque : Il n'y a pas de façon canonique de définir la reunion $Y_a \cup Z_a$ de 2 germes d'espaces analytiques puisqu'on peut remplacer $I \cap J$ par $I.J$

4.4 Corollaire : (X, a) espace analytique pointé
$P_1, \dots, P_m$ = idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,a}$
$N = P_1 \cap \dots \cap P_m$ = nilradical de $\mathcal{O}_{X,a}$
$Y_{i,a} \doteq$ germe d'esp. analytique en a défini par P_i
$(X_a)_{red} \doteq$ " " " N

Alors $$\boxed{\{(X_a)_{red}\} = \{X_a\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{Y_{i,a}\}}$$

Les germes d'espaces analytiques $Y_{i,a}$ s'appellent les composantes intègres du germe X_a. (*)

(*) cf définition 4.1 : $Y_{i,a}$ est un germe intègre car $Y_{i,a}$ est défini par un idéal premier. (et $\mathcal{O}_{X,a}/P_i$ intègre $\Leftrightarrow$ P_i premier !)

Morphismes plats

annelés Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. Le foncteur f^* de la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-modules dans celle des $\mathcal{O}_X$-modules est défini par :

$$f^* F = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1} F$$

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

pour tout $\mathcal{O}_Y$-module F de base Y.

f^* est un foncteur exact à droite.

annelés (1) **Définition** : On dit que $f : X \to Y$ est un morphisme plat entre espaces analytiques si le foncteur f^* est exact.

Fibre à fibre, cela signifie que :

(2) $\forall x \in X$ le foncteur $\mathcal{O}_{X,x} \underset{\mathcal{O}_{Y,f(x)}}{\otimes} (\ )$ est exact à gauche

En effet : $(f^*F)_x = \mathcal{O}_{X,x} \underset{\mathcal{O}_{Y,f(x)}}{\otimes} F_y$ et F_y est un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-module qui peut être choisi arbitraire-ment. (Ici $y = f(x)$)

Enfin, (2) équivaut à l'énoncé :

(3) $\forall x \in X$ $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-module plat.

Chapitre 6 — Morphismes finis

1. Le théorème des morphismes finis

1.1 Théorème :

Soient $\varphi : X \longrightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques,
$x \in X$ et $s = \varphi(x)$ fixés,
F un $\mathcal{O}_X$-module
Z le support de F

On suppose que 1) F est de présentation finie (*)
2) $F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Alors il existe un voisinage X' de x et un voisinage S' de s tels que :

(a) $\varphi(X') \subset S'$, On notera $\varphi' = \varphi|_{X'} : X' \longrightarrow S'$,

plutôt $\varphi'|_Z$ [(b) $\varphi' : X' \cap Z \longrightarrow S'$ est un morphisme propre à fibres finies

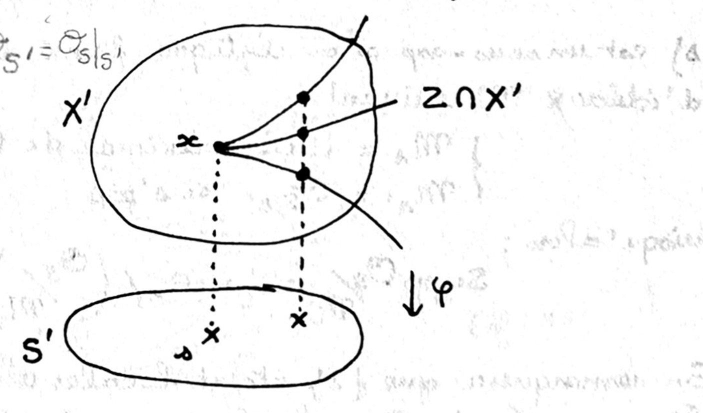
(c) $X' \cap Z \cap \varphi'^{-1}(s) = \{x\}$

(d) $(\varphi'_* F)_t = \bigoplus_{y \in \varphi'^{-1}(t) \cap Z} F_y$

(e) $\varphi'_* F$ est un $\mathcal{O}_S$-module de présentation finie sur S. (**)

plutôt $\mathcal{O}_{S'} = \mathcal{O}_S|_{S'}$

(b) et (c) s'illustrent ainsi :



Ce théorème est un théorème d'image directe modulo la condition 2), qui asserte que si F est de présentation finie, alors $\varphi'_* F$ aussi.

(*) On écrira systématiquement "présentation finie" pour "localement de présentation finie" sans plus le rappeler.

(**) Voir aussi le Co. 1.4 p 72 , (1) et (3).

1.2 Définition : Soient X un espace analytique et F un $\mathcal{O}_X$-module.
On dit que <u>F est quasi-fini</u> en $x \in X$ pour le morphisme $\varphi : X \to S$ si :

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(F_x \underset{\mathcal{O}_{S,s}}{\otimes} \mathbb{C} \right) < \infty$$

<u>Remarque 1.2.1</u> :

<u>Signification de l'hypothèse 2) du Théorème 1.1</u>

a)* x est isolé dans le support de F (signification topologiques, cf c))

b)* $F_x \underset{\mathcal{O}_{S,s}}{\otimes} \mathbb{C} = F_x \underset{\mathcal{O}_{S,s}}{\otimes} \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{M}_s$

ie $\mathbb{C} \simeq \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{M}_s$ est un $\mathcal{O}_{S,s}$-module.

D'ailleurs, F_x est un $\mathcal{O}_{S,s}$-module puisque c'est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module et puisque $\varphi^* : \varphi^{-1}\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_X$ induit le morphisme germique :

$$\varphi^*_x : (\varphi^{-1}\mathcal{O}_S)_x = \mathcal{O}_{S,s} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

$F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbb{C}$ a bien un sens.

$\{s\}$ est un sous-espace analytique fermé de S défini par le faisceau d'idéaux $\mathfrak{M}$ suivant :

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_s = \text{idéal maximal de } \mathcal{O}_{S,s} \\ \mathfrak{M}_{s'} = \mathcal{O}_{S,s'} \text{ si } s' \neq s \end{cases}$$

puisqu'alors :

$$\operatorname{supp} \mathcal{O}_S/\mathfrak{M} = \{ x \in S / \left(\mathcal{O}_S/\mathfrak{M}\right)_s = \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{M}_s \neq 0 \} = \{s\}.$$

On remarquera que $\{s\}$ étant localement fermé dans S, le faisceau $\mathcal{O}_S/\mathfrak{M}$ représente le prolongé par 0 du faisceau $\mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{M}_s$ sur $\{s\}$ (cf Th.7.2 p 29 verso)

Soit le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(s) & & \{s\} \\ \downarrow j & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

Le sous-lemme β) p 58 verso montre que le produit fibré $X \times_S \{s\}$ est un sous-espace analytique fermé de X associé à l'idéal $\varphi^*(\varphi^{-1}\mathfrak{m})$. Comme Top commute avec le produit fibré, on a : $\mathrm{Supp}\ \mathcal{O}_X / \varphi^*(\varphi^{-1}\mathfrak{m}) = \varphi^{-1}(s)$, de sorte que $\left(\varphi^{-1}(s),\ \mathcal{O}_X / \varphi^*(\varphi^{-1}\mathfrak{m}) \Big|_{\varphi^{-1}(s)}\right)$ soit un sous-espace analytique fermé de X.

Par définition de j^*F (cf chap. 3 §10 p 37) :

$$j^*F \doteq \mathcal{O}_X / \varphi^*(\varphi^{-1}\mathfrak{m}) \Big|_{\varphi^{-1}(s)} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} j^{-1}F$$

$j^{-1} = (\ )|_{\varphi^{-1}(s)}$ donc

$$j^*F = j^{-1}\left(\mathcal{O}_X / \varphi^*(\varphi^{-1}\mathfrak{m}) \otimes_{\mathcal{O}_X} F \right) \qquad \text{((*) ci-derrière.)}$$

$$j^*F = j^{-1}\left(F / (\varphi^*\varphi^{-1}\mathfrak{m}).F \right) \qquad \text{(cf (**) ci-derrière)}$$

$$j^*F = F / (\varphi^*\varphi^{-1}\mathfrak{m}).F \Big|_{\varphi^{-1}(s)}$$

D'autre part :

$$F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbb{C} = F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s = F_x / \mathfrak{m}_s.F_x \qquad \text{(cf (**))}$$

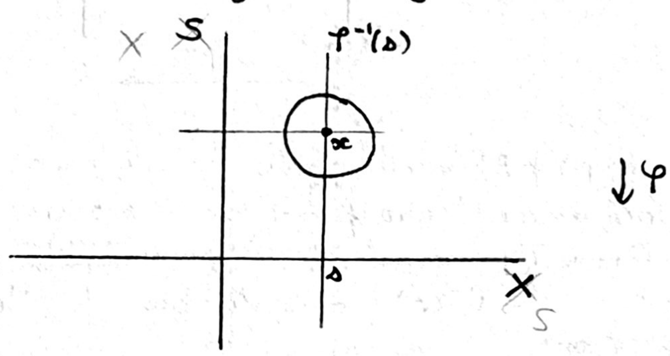
n'est autre que la fibre de j^*F au dessus de x, car

$$(j^*F)_x = \left(\left(F / (\varphi^*\varphi^{-1}\mathfrak{m}).F \right)\Big|_{\varphi^{-1}(s)}\right)_x = F_x / ((\varphi^*\varphi^{-1}\mathfrak{m}).F)_x \overset{?}{=} F_x / \mathfrak{m}_s F_x$$

Ainsi

$$\boxed{F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbb{C} \simeq (j^*F)_x}$$

L'hypothèse 2) (ie la propriété d'être quasi-fini) donne donc des renseignements sur la fibre de j^*F en x :



(*) Si A et B sont des $\mathcal{O}_X$-modules et si $j : Y \to X$, on a $j^{-1}A \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} j^{-1}B = j^{-1}(A \otimes_{\mathcal{O}_X} B)$.
Il suffit de définir les morphismes :

$$\begin{array}{ccc} j^{-1}A \times j^{-1}B & \longrightarrow & j^{-1}(A \otimes_{\mathcal{O}_X} B) \\ (s, s') & \longmapsto & s \otimes s' \\ \downarrow & \overset{\sim}{\nearrow} \psi & \\ j^{-1}A \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} j^{-1}B & & \end{array}$$

$A \otimes_{\mathcal{O}_X} B$ est le faisceau associé au préfaisceau $A(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} B(U)$. On a $(A \otimes_{\mathcal{O}_X} B)_x = A_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} B_x$ et $\bigcup\limits_{x \in X}^{\cdot} A_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} B_x$ est l'espace étalé associé à ce préfaisceau. On vérifie que $s \otimes s'$ définit bien une section de $j^{-1}(A \otimes_{\mathcal{O}_X} B)$ lorsque s et s' sont des sections de $j^{-1}A$ et $j^{-1}B$ respectivement

$$\begin{array}{ccc} & \overset{s}{\nearrow} & A \\ & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{j} & X \\ & & \uparrow \\ & \underset{s'}{\searrow} & B \end{array}$$

On a un isomorphisme ψ car, fibre à fibre et en posant $j(y) = x$, on a :

$$\begin{cases} (j^{-1}A \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} j^{-1}B)_y = (j^{-1}A)_y \otimes_{(j^{-1}\mathcal{O}_X)_y} (j^{-1}B)_y = A_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} B_x \\ (j^{-1}(A \otimes_{\mathcal{O}_X} B))_y = (A \otimes_{\mathcal{O}_X} B)_x = A_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} B_x \end{cases}$$

(**) Si B est un A-module et si $\mathfrak{M}$ est un idéal de A, on a

$$A/\mathfrak{M} \otimes_A B = B/\mathfrak{M}.B$$

preuve : $0 \to \mathfrak{M} \to A \to A/\mathfrak{M} \to 0$ donne, puisque $\otimes_A$ est exact à droite : $\mathfrak{M} \otimes_A B \xrightarrow{\varphi} A \otimes_A B \longrightarrow A/\mathfrak{M} \otimes_A B \longrightarrow 0$, donc

$$A/\mathfrak{M} \otimes_A B = \operatorname{Coker} \varphi = \frac{\overset{B}{\overset{\wr\wr}{A \otimes_A B}}}{\operatorname{Im} \varphi} = B/\mathfrak{M}.B$$ après l'identification habituelle :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_A B & \xrightarrow{\sim} & B. \\ a \otimes b & \longmapsto & a.b \end{array}$$

preuve du Théorème 1.1 :

1°/ Cas où $X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} S = \mathbb{C}^n$

$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$

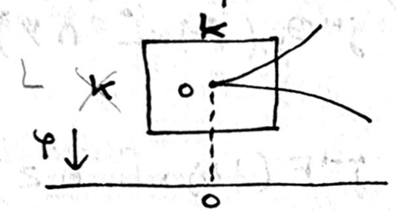
$x = (0, \dots, 0) \qquad s = (0, \dots, 0)$

L'hypothèse 2) s'écrit : $\dim \left(F_0 \otimes_{\mathcal{O}_{x_1, \dots, x_n}} \mathcal{O}_{x_1, \dots, x_n} / (x_1, \dots, x_n) \right) < \infty$

ie $\dim \left(F_0 / (x_1, \dots, x_n) F_0 \right) < \infty$.

D'après le chapitre sur le Th. de Weierstrass, $\exists\, h \in \mathcal{O}_{x_1, \dots, x_{n+1}}$ $h(0, x_{n+1}) \not\equiv 0$ et $hF_0 = 0$. (cf lemme 2.6.2 p44 du chap 4)

F est un $\mathcal{O}_{n+1}$-module de type fini, donc il existe un voisinage compact $K \times L$ de 0 dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ tel que $hF = 0$ sur $\mathring{K} \times \mathring{L}$ et h possède les propriétés de Weierstrass sur $K \times L$ (ie h ne s'annule pas sur $K \times \partial L$ et ne s'annule sur $0 \times \partial L$ que sur l'origine : restreindre L au besoin) (*)



(NB : $h(0,0) = 0$, sinon trivial.)

Prenons $S' = \mathring{K}$

$X' = \mathring{K} \times \mathring{L}$

$Y = h^{-1}(0)$

On a $\varphi(X') \subset S'$ et $\varphi'|_Y$ est finie au dessus de S' puisque

$(\varphi'|_Y)^{-1}(x_{n+1}) = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in X' \,/\, h(x) = 0 \}$ est fini d'après le théorème de Weierstrass (chap 4, Th 2.1, (1))

Alors :

propre X

$\varphi'|_{X' \cap Y} : X' \cap Y \longrightarrow S'$ est propre (cf. situation de Weierstrass) à fibres finies, et $X' \cap Y \cap \varphi^{-1}(0) = \{0\}$.

Comme $hF = 0$ dans X', $X' \cap Z \subset Y \cap X'$ et $X' \cap Z$ est fermé dans $Y \cap X'$, donc à fortiori

$\varphi' : X' \cap Z \longrightarrow S'$ est propre à fibre finie, et vérifie $X' \cap Z \cap \varphi'^{-1}(0) = \{0\}$.

$$X' \cap Z \overset{\text{fermé}}{\subset} X' \cap Y \subset X'$$

(flèches de $X' \cap Z$, $X' \cap Y$ (propre fibre finie) et X' (φ') vers S')

ce qui prouve a), b) et c).

(*) cf chap 4, preuve de la prop 2.3.

preuve de (d)

Posons $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{X'}/_{h}$. $\mathcal{O}_Y$ est un faisceau sur X'.
Soient

$$j : X' \cap Y \hookrightarrow X' \quad \text{et} \quad \tilde{j} : X' \cap Z \hookrightarrow X'$$

dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{j} & & \\ X' \cap Z & \longrightarrow & X' \cap Y & \xrightarrow{j} & X' \\ & \searrow^{\varphi'_2} & & \searrow^{\varphi'_1} & \downarrow \varphi' \\ & & & & S' \end{array}$$

(φ'_1, φ'_2 propres à fibres finies, on les notera encore φ')

Pour tout $t \in S'$, on a :

(1)
$$\begin{cases} (\varphi'_* \mathcal{O}_Y)_t \overset{(**)}{=} (\varphi'_* j_* j^{-1} \mathcal{O}_Y)_t \overset{(*)}{=} j^{-1}\mathcal{O}_Y(\{t\} \times \mathring{L} \cap Y) = \bigoplus_{y \in \varphi'^{-1}(t) \cap Y} \mathcal{O}_{Y,y} \\ (\varphi'_* F)_t \overset{(**)}{=} (\varphi'_* \tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} F)_t \overset{(*)}{=} \tilde{j}^{-1} F(\{t\} \times \mathring{L} \cap Z) = \bigoplus_{y \in \varphi'^{-1}(t) \cap Z} F_y \end{cases}$$

les dernières égalités provenant du fait que $\{t\} \times \mathring{L} \cap Y$ et $\{t\} \times \mathring{L} \cap Z$ sont de cardinal fini.
ce qui prouve (d).

(*) Si $\varphi : X \to Y$ application fermée, X paracompact, pour tout faisceau F sur X et $\forall t \in Y$, on a

$$\boxed{(\varphi_* F)_t = F(\varphi^{-1}(t))}$$

preuve : cf 8.1.1 chap 3

(**) Prop : Si $j : X \hookrightarrow Y$ est une inclusion fermée (ie $X \Subset Y$) et F un faisceau sur X, alors le foncteur $j_*(.)$ représente le foncteur "prolongement par 0" de F.
En effet, le foncteur "prol. par 0" existe (cf chap 3., 7.2) et

$$\begin{cases} \forall t \in X \quad (j_* F)_t \overset{(*)}{=} F(j^{-1}(t)) = F(t) \\ \forall t \in Y \setminus X \quad (j_* F)_t = 0 \quad (\text{car } \exists U \text{ vois de } t \,/\, (j_* F)(U) = F(\emptyset) \doteq 0) \end{cases}$$

Corollaire : Si $j : X \hookrightarrow Y$ est une inclusion fermée et F un faisceau sur Y dont le support est inclus dans X, alors $\boxed{j_* j^{-1} F = F}$. (preuve : $j^{-1}F$ est un faisceau sur X et $j_* j^{-1} F$ est le faisceau prolongé par 0 de $j^{-1}F$ sur tout Y, tout comme F. D'après l'unicité du prolongement par 0, on a bien $j_* j^{-1} F = F$.)

NB : On a aussi $j^{-1} j_* F = F$ (cf p 81 preuve 2.2)

(e) $\varphi'_* F$ de présentation finie sur S ?

$\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{X'}/h$. Par hypothèse, F est de présentation finie donc

$$\mathcal{O}|^p_{X'} \longrightarrow \mathcal{O}|^q_{X'} \longrightarrow F|_{X'} \longrightarrow 0$$

En appliquant le foncteur exact à droite $\otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_Y$:

$$\mathcal{O}_Y^p \longrightarrow \mathcal{O}_Y^q \longrightarrow F|_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X'}/h \longrightarrow 0$$

Mais $F|_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X'}/h \underset{(2)}{=} \left.\dfrac{F}{hF}\right|_{X'} = F|_{X'}$ car $hF|_{X'} = 0$ par construction de h.

((2) provient du foncteur exact à droite $\otimes_{\mathcal{O}}$ car $0 \to h\mathcal{O} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/h \to 0$ implique $F \otimes_{\mathcal{O}} h\mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} F \to F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/h \to 0$ donc $F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/h = \operatorname{Coker} \varphi$ $= F/\operatorname{Im}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi \simeq hF$ dans l'identification $\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} F \simeq F$.)

Finalement, la suite :

$$\mathcal{O}_Y^p \longrightarrow \mathcal{O}_Y^q \longrightarrow F|_{X'} \longrightarrow 0$$

est exacte. Le foncteur φ'_* n'est pas exact à droite en général (*) mais les égalités (1) montrent que

$$\varphi'_* \mathcal{O}_Y^p \longrightarrow \varphi'_* \mathcal{O}_Y^q \longrightarrow \varphi'_* F|_{X'} \to 0$$ est encore exact

(c'est une collection de suites puisque $(\varphi'_* \mathcal{O}_Y)_t = \bigoplus_{y \in \varphi'^{-1}(t) \cap Y} \mathcal{O}_{Y,y}$ est une somme directe, idem pour $(\varphi'_* F)_t$.
On regarde l'exactitude fibre à fibre !)

plus simple ! Le lemme suivant permet de conclure car si $A \to B \to F \to 0$, ie si F est le conoyau d'un morphisme entre deux $\mathcal{O}_S$-modules de présentations finies, F est lui-m̂ un $\mathcal{O}_S$-module de présentation finie.

(*) $f : X \to Y$ morphisme propre à fibres finies $\Rightarrow f_*$ est exact.
Mais pour appliquer ce résultat ici il faut se restreindre à $X' \cap Z$ pour parler de $\varphi' : X' \cap Z \to S'$.

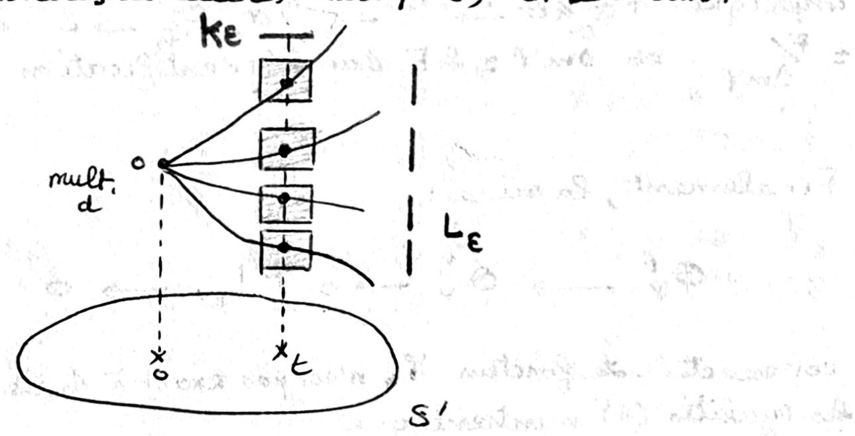
Lemme 1.1.1 : $\varphi'_* \mathcal{O}_Y$ est un $\mathcal{O}_S$-module libre de type fini

preuve : Soit d le nombre de zéro de $x_{n+1} \mapsto h(0,\dots,0,x_{n+1})$. On montre que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n|_S^{\,d} & \longrightarrow & \varphi'_* \mathcal{O}_Y \\ (f_1,\dots,f_d) & \longmapsto & \sum_{j=1}^{d} (f_j \circ \varphi')\, x_{n+1}^{d-j} \end{array} \qquad (2)$$

est un isomorphisme de faisceaux.
Ici, x_{n+1}^{d-j} désigne une section globale de $\mathcal{O}_Y$, donc définit bien une section de $\mathcal{O}_Y(\varphi'^{-1}(U))$, et $f_j \circ \varphi' \in \mathcal{O}_Y(\varphi'^{-1}(U))$ où $U \subset S$.

On vérifie l'isomorphisme (2) fibre à fibre :
Si $t \in S'$, notons $\{(t,y_1),\dots,(t,y_\ell)\}$ la fibre de φ au dessus de t.
On a $\ell \leq d$ (possibilités de racines multiples) et le dessin :



On peut trouver des voisinages K_ε compact connexe et L_ε compact (non nécessairement connexe), de sorte que $K_\varepsilon \times L_\varepsilon$ soit un voisinage compact de l'ensemble $\{(t,y_1),\dots,(t,y_\ell)\}$ et que le théorème de préparation de Weierstrass s'applique sur $K_\varepsilon \times L_\varepsilon$. (cf chap 4 : Th 2.1 et construction de la preuve de la prop. 2.3)
On aura donc l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} B(K_\varepsilon)^d & \xrightarrow{\ \simeq\ } & B(K_\varepsilon \times L_\varepsilon) / h\,B(K_\varepsilon \times L_\varepsilon) \\ (f_1,\dots,f_d) & \longmapsto & f_d + \dots + f_1 x_{n+1}^{d-1} \end{array}$$

On passe à la limite inductive pour $\varepsilon \to 0$ pour obtenir :

$$\mathcal{O}_{S,t}^{d} \xrightarrow{\ \simeq\ } \left(\bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathcal{O}_{X,(t,y_i)} \right) / h$$

d'où (2).

2°/ <u>Cas où</u> $X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^n = S$
$x = (0,0) \longmapsto s = 0$

<u>récurrence sur p</u> : c'est vrai au rang 1 d'après le 1°/. Posons :

$$X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{C}^{n+p-1} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{C}^n = S$$

Par fonctorialité de l'image directe, on a $(\pi_2 \pi_1)_* = \pi_{2*} \pi_{1*}$.
On a :

F quasi-fini sur $\mathbb{C}^n$ pour $\pi_2\pi_1 \Rightarrow$ F quasi-fini sur $\mathbb{C}^{n+p-1}$ pour π_1
En effet, il faut vérifier que

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(F_0 \otimes_{\mathcal{O}_n} \mathcal{O}_n / \mathfrak{m}_n \right) < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \left(F_0 \otimes_{\mathcal{O}_{n+p-1}} \mathcal{O}_{n+p-1} / \mathfrak{m}_{n+p-1} \right) < \infty$$

ce qui provient de l'écriture $F_0 \otimes_{\mathcal{O}_n} \mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n = F_0/\mathfrak{m}_n F_0$ et de l'existence de la surjection évidente :

$$F_0/\mathfrak{m}_n F_0 \longrightarrow F_0/\mathfrak{m}_{n+p-1} F_0 \longrightarrow 0$$

(puisque $\mathfrak{m}_n = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathfrak{m}_n F_0$ (resp. $\mathfrak{m}_{n+p-1} F_0$) désigne l'idéal engendré par les $x_i \cdot f$, $1 \leq i \leq n$ (resp. $1 \leq i \leq n+p-1$) et $f \in F_0$ }, donc $\mathfrak{m}_n \subset \mathfrak{m}_{n+p-1}$). On peut donc appliquer le cas 1°/ :

D'après le 1°/, on a $\pi'_1 : X' \longrightarrow S'$, $X' \subset \mathbb{C}^{n+p}$, $S' \subset \mathbb{C}^{n+p-1}$, vérifiant les conditions (a) à (e) du Th. 1.1.

Remarquons que $\pi'_{1*} F$ est un $\mathcal{O}_{S'}$-module de présentation finie (cf 1°/ (c)). Il est quasi-fini sur $\mathbb{C}^n$ puisque
- 1) $(\pi'_1 F)_0 = F_{00}$ (cf 1°/ (c) et (d))

et
- 2) $(\pi'_{1*} F)_0 \otimes_{\mathcal{O}_n} \mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n = (\pi'_{1*} F)_0 / \mathfrak{m}_n = F_{0,0} / \mathfrak{m}_n F_{0,0}$ de dimension finie par hypothèse.

Ainsi $\pi'_{1*} F$ vérifie les hypothèses du théorème. L'hypothèse de récurrence au rang précédent montre que :

$$\pi''_2 : S'' \longrightarrow T''$$

vérifie les conditions (a) à (e) du Th 1.1.

D'où une application

$$\varphi' = X'' \xrightarrow{\pi_1''} S'' \xrightarrow{\pi_2''} T''$$

où $X'' = X' \cap (\pi'^{-1})(S'')$ et $\pi_1'' = \pi_1'|_{X''}$

Avant de vérifier que cette application convient, remarquons :

<u>Lemme 1.1.2 :</u> (b) $\Rightarrow$ (d) est toujours vraie, ie si $\varphi' : X' \cap Z \to S'$ est un morphisme propre à fibres finies où $Z = \operatorname{Supp} F$, alors

$$(\varphi'_* F)_t = \bigoplus_{y \in \varphi'^{-1}(t) \cap Z} F_y \qquad \forall t \in S'$$

preuve du lemme 1.1.2 : On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' \cap Z & \overset{\gamma}{\hookrightarrow} & X' \\ & \searrow & \downarrow \varphi' \\ & & S' \end{array} \qquad \text{où } Z = \operatorname{Supp} F$$

$\varphi'_* F = \varphi'_* \gamma_* \gamma^{-1} F$ car $\gamma_* \gamma^{-1} F = F$ puisque γ est une inclusion
$= (\varphi' \circ \gamma)_* \gamma^{-1} F$ fermée (cf (**) p67 verso)

D'après (*) p 67 verso, comme $\varphi' \circ \gamma$ est fermée, on a :

$$(\varphi'_* F)_t = \gamma^{-1} F\,((\varphi' \circ \gamma)(t))$$

et $(\varphi' \circ \gamma)(t) = \{y_1, \dots, y_k\}$ = pts isolés de $\varphi^{-1}(t)$ dans le support Z.

Donc :

$$(\varphi'_* F)_t = \bigoplus_{i=1}^{k} F_{y_i}$$

CQFD

Ce lemme 1.1.2 montre, en même temps, que $Z' \doteq \operatorname{Supp} \pi'_{1*} F$ est $\pi(Z)$:

$$Z' \doteq \operatorname{Supp} \pi'_{1*} F = \pi(Z)$$

En effet,

$Z' = \{x \in S' \ / \ (\pi'_{1*}F)_x \neq 0\}$ (sans adhérence car de type fini)
$= \{x \in S' \ / \ \exists y \in \varphi^{-1}(x) \ \ F_y \neq 0\} = \pi_1(Z)$ (compte tenu de 1.1.2 et parceque $\pi'_1 : X' \cap Z \to S'$ est propre à fibres finies d'après le 19)

On a posé $\varphi' = \pi''_2 \pi''_1 : X'' \longrightarrow T''$, et on vérifie les propriétés (a), (b), (c), (e) par composition :

- (a) trivial
- (b) et (c) : On a

$$\begin{array}{ccc} X'' \cap Z & \xrightarrow{\pi'_1} & \\ \varphi' \downarrow & & S'' \cap \pi'_1(Z) = S'' \cap Z' \\ T'' & \xleftarrow{\pi''_2} & \end{array}$$

où $X'' = \pi_1'^{-1}(S'')$.
φ' est à fibres finies puisque composée de 2 appl. à fibres finies, et vérifie trivialement (c).
X $\varphi' : X'' \cap Z \to T''$ est propre ?

- (e) $\varphi'_* F = \pi''_{2*}(\pi''_{1*}F)$

et $\pi''_{1*}F = (\pi'_{1*}F)|_{S''}$ est un $\mathcal{O}_{S''}$-module de présentation fini, et quasi-fini pour π_2, tout comme $\pi'_{1*}F$.
Par suite $\pi''_{2*}(\pi''_{1*}F)$ est un $\mathcal{O}_{T''}$-module de présentation finie d'après les consts. de $\pi''_2 : S'' \to T''$.

CQFD

3°/ Cas où X et S sont des modèles d'espaces analytique

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

On devrait écrire $U \Subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ et $V \subset \mathbb{C}^n$ au lieu de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^n$, mais cela ne prête pas à confusion.

F = X-module, où $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+p}}/I \,\big|_{\mathrm{Supp}(\,) = X}$

Soit $\tilde{F}$ le prolongement par 0 du faisceau F sur $\mathbb{C}^{n+p}$: c'est $j_* F$ lorsque j est l'inclusion fermée, c'est $j_! F$ = image directe à support propre de F dans le cas général, $j_! F$ est défini par :

$$j_! F(U) = \{ \gamma \in F(j^{-1}(U)) \ / \ j|_{|\gamma|} : |\gamma| \longrightarrow \mathbb{C}^n \text{ propre} \}$$

où $|\gamma|$ désigne le support de la section $\gamma \in F(j^{-1}(U))$.

(retourner au chapitre 3, §7, Th 7.2 p 29)

Alors :

α) $\tilde{F}$ est de présentation finie au voisinage de 0 :

Le foncteur "prolongement par 0" est exact (trivial : passer aux fibres !) donc

$$\mathcal{O}_X^p \longrightarrow \mathcal{O}_X^s \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

donne :

$$\tilde{\mathcal{O}}_X^p \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_X^s \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow 0$$

où $\tilde{\mathcal{O}}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p}/I$ puisque $\mathcal{O}_X = \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p}/I \right) \Big|_{\mathrm{Supp}(\,) = X}$

$\tilde{F}$ apparaît donc comme le conoyau de 2 faisceaux de $\mathcal{O}_X$-présentation finie, donc $\tilde{F}$ est de $\mathcal{O}_X$-présentation finie. (*)

(*) Rappel : le quotient, le conoyau de 2 faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules de présentation finie est encore de présentation finie. On a la m̂ chose en remplaçant "présentation finie" par "$\mathcal{O}_X$-module cohérent". Une autre façon de montrer que $\tilde{F}$ est de $\mathcal{O}_X$-présentation finie consisterait à dire que I de type fini et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+p}}$ cohérent $\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+p}}/I$ cohérent, donc le conoyau $\tilde{F}$ est cohérent, donc à fortiori de présentation finie.

β) $\tilde{F}$ est quasi-fini à l'origine

$\tilde{F}_0 = F_0$

$F = X$-module $\Rightarrow$ $F_0 = \mathcal{O}_{n+p}/_I$ - module. On considère la dimension de :

$$F_0 / \left(\mathfrak{m}_{n+p}/_I\right) \quad \text{où } \mathfrak{m}_{n+p}/_I = \text{idéal maximal de } \mathcal{O}_{X,0}$$

$\dim_{\mathbb{C}} F_0 / \left(\mathfrak{m}_{n+p}/_I\right) < \infty$ par hypothèse, donc $\dim_{\mathbb{C}} F_0 / \mathfrak{m}_{n+p} F_0 < \infty$.

Suite $A/_I$ = A-module noethérien $\Rightarrow$ $A/_I$ = anneau noethérien
I idéal de A

On applique le théorème 1.1 à $\tilde{F}$ (cf 2°) pour obtenir

$$\tilde{X}' \subset \mathbb{C}^{n+p} \xrightarrow{\pi'} \tilde{S}' \subset \mathbb{C}^n$$

vérifiant (a) à (e).

On montre alors que l'application :

$$X' = \tilde{X}' \cap X \xrightarrow{\varphi'} S' = \tilde{S}' \cap S$$

est solution du problème 1.1 dans le cas 3°.

$Z = \operatorname{Supp} F = \operatorname{Supp} \tilde{F}$

$$\begin{array}{ccccc} X' \cap Z \subset & X' = \tilde{X}' \cap X & \hookrightarrow & \tilde{X}' \\ \searrow & \downarrow \varphi' & & \downarrow \pi' \\ & S' = \tilde{S}' \cap S & \hookrightarrow & \tilde{S}' \end{array}$$

(a) trivial

$\pi' : \tilde{X}' \cap Z \to \tilde{S}'$ propre à fibres finies vérifie (c), donc $\varphi' : X' \cap Z \to S'$ est à fibres finies et vérifie (c).

Vérifions que $\varphi' : X' \cap Z \to S'$ est propre :

preuve de (2) :

Comme $\pi'_* \tilde{F}$ est de présentation finie :

$$\mathcal{O}_n^p \longrightarrow \mathcal{O}_n^q \longrightarrow \pi'_* \tilde{F} \longrightarrow 0$$

Le foncteur $\mathcal{O}_{S'} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_n} j^{-1}(.)$ étant exact à droite, on obtient :

$$\mathcal{O}_{S'}^p \longrightarrow \mathcal{O}_{S'}^q \longrightarrow \mathcal{O}_{S'} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_n} j^{-1}\pi'_* \tilde{F} \longrightarrow 0$$

$$F \rightsquigarrow \tilde{F}$$

où
$$\begin{array}{ccc} X' & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathbb{C}^{n+p} \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \pi' \\ S' & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathbb{C}^n \end{array}$$
commute.

Le diagramme carré donne : $\pi'_* \tilde{F} = j_* \varphi'_* F$ puisque $\tilde{F} = j_* F$

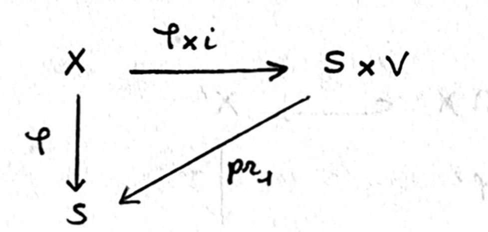
Donc :

$$\mathcal{O}_{S'} \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_n} (j^{-1} j_* \varphi'_* F) \doteq j^*(j_* \varphi'_* F) = \varphi'_* F$$

car $j^* j_* = Id$

CQFD

4°/ Cas général : $\begin{cases} X = (p, V, g_1, \dots, g_N) \\ S = (n, U, f_1, \dots, f_p) \end{cases}$ $\quad X \overset{i}{\hookrightarrow} V$



i^* surjectif $\Rightarrow (\varphi \times i)^*$ surjectif $\Rightarrow \varphi \times i$ est un plongement local (cf critère de plongement, chap 5, §2)

$\Rightarrow X$ isomorphe à un localement fermé de $S \times V$.

Alors
$$\begin{array}{ccccc} X \simeq \tilde{X} & \longrightarrow & S \times V & \longrightarrow & U \times V \\ \varphi \downarrow & \swarrow pr_1 & & & \downarrow \pi \\ S & & \longrightarrow & & U \end{array}$$

et on est ramené au cas précédent. FIN.

Conséquences du Théorème 1.1 :

1.3 Définitions :

Soient X un espace analytique, $\varphi : X \to S$ et F un X-module. Notons $Z = \operatorname{Supp} F$ et $\varphi(x) = s$.

(1) On dit que F est quasi-fini en x si $\dim_{\mathbb{C}} (F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,\varphi(x)}} \mathbb{C}) < \infty$ (**)

(2) On dit que F est fini en x si F_x est un $\mathcal{O}_{S,s}$-module de type fini.

(3) On dit que φ est quasi-finie (resp. finie) en x si $\mathcal{O}_X$ est quasi-fini (resp. fini) en x au sens (1) (resp. (2))

(4) F est localement quasi-fini (resp. localement fini) s'il est quasi-fini (resp. fini) en tout point de X.

(5) φ est localement quasi-finie (resp. loc. finie) si $\mathcal{O}_X$ l'est au sens (4)

(6) F est fini (on dit encore : "F est fini sur S") si F est localement fini et si l'application $\varphi|_Z$ est propre.

1.4 Corollaire : Soient $\varphi : X \to S$ et F un X-module de présentation finie (*). On a :

(1) F fini en $x \iff F$ quasi-fini en x

(2) $\{ x \in X \,/\, F \text{ fini en } x \}$ est un ouvert.

(3) F fini sur S (*) $\Rightarrow \varphi_* F$ est de présentation finie

(4) F fini sur $S \Rightarrow \varphi(Z)$ est le support de $\varphi_* F$, donc en particulier $\varphi(Z)$ est fermé.

(1) * fini $\Rightarrow$ quasi-fini :

On a l'isomorphisme canonique :

$$F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s \xrightarrow{\ \simeq\ } F_x/\mathfrak{m}_s$$

$$f \otimes \dot{g} \longmapsto \overline{f \cdot g}$$

qui donne la structure de $\mathbb{C} = \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s$-module sur $F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbb{C}$.

(*) On écrit "présentation finie" pour "localement de présentation finie" au sujet d'un $\mathcal{O}_X$-module. Cet abus sera constant : toutes les propriétés de ce type seront locales.

(*) cf définition 1.3 (6) : on suppose $\varphi|_Z$ propre !

(**) cf remarque 1.2.1 pour la définition de $F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbb{C}$.

Si $(f_1, \dots, f_p)$ engendrent F_x comme $\mathcal{O}_{S,s}$-module, $(\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_p)$ engendrent $F_x/\mathfrak{m}_s$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel

On a, en effet : $f \otimes \dot{g} = g(0)\, f \otimes \dot{1}$

puisque $\mathcal{O}_{S,s} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} / g_1, \dots, g_p$ (localement !) donc $\mathfrak{m}_s = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} / (g_1, \dots, g_p)$

et $f \otimes \dot{g} = f \otimes (\overline{g(0) + m})$ où $m \in \mathfrak{m}_s$ (développ. en série entière)

$= f \otimes g(0) . \dot{1} = g(0)\, f \otimes \dot{1}$.

* <u>quasi-fini $\Rightarrow$ fini</u> :

Th. 1.1 (e) $\Rightarrow$ $\varphi'_* F = \mathcal{O}_S$-module de présentation finie
Th 1.1 (c) et (d) $\Rightarrow$ $(\varphi'_* F)_s = F_x$

Donc $F_x = \mathcal{O}_{S,s}$-module de type fini (il suffit de passer à la limite inductive dans la suite exacte

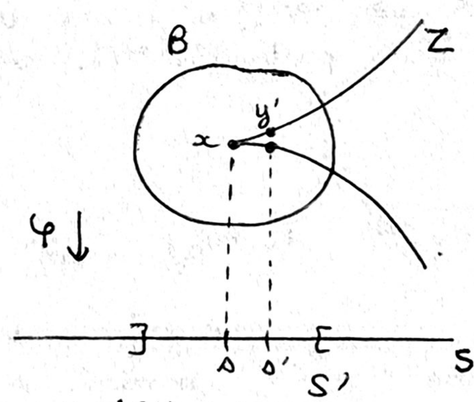
$$\mathcal{O}_S^n \longrightarrow \mathcal{O}_S^p \longrightarrow \varphi'_* F \longrightarrow 0$$

pour obtenir :

$$\mathcal{O}_{S,s}^n \longrightarrow \mathcal{O}_{S,s}^p \longrightarrow F_x \longrightarrow 0$$

compte tenu des 2 remarques précédents. F_x est bien de $\mathcal{O}_{S,s}$-présentation finie

(2) Si F est fini en x, on peut appliquer le Th. 1.1 :



B = voisinage de x satisfaisant 1.1.

* Si $y' \in B \setminus Z$, $F_{y'} = 0$ donc F est fini en y'.

* Si $y' \in B \cap Z$, en utilisant le Th 1.1 (e), (d) on obtient (comme dans la démonstration de quasi-fini $\Rightarrow$ fini ci-dessus) :

$$\mathcal{O}_{s'}^n \longrightarrow \mathcal{O}_{s'}^t \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\varphi(y)=s' \\ y \in Z}} F_y \longrightarrow 0$$

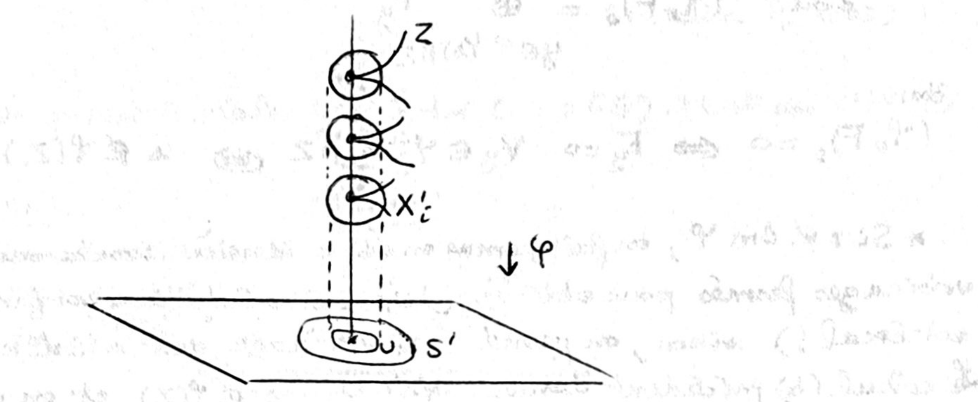
$$\bigoplus F_y \xrightarrow{pr_{y'}} F_{y'}, \quad \mathcal{O}_{s'}^t \xrightarrow{\text{surjective}} F_{y'}$$

donc $F_{y'}$ de type fini
$\Updownarrow$
F fini en y'

(3) $$\begin{array}{ccc} Z & \overset{j}{\hookrightarrow} & X \\ & \searrow^{\varphi|_Z} & \downarrow \varphi \\ & & S \end{array}$$

(a) $\left\{\begin{array}{l} \varphi|_Z \text{ propre} \\ F \text{ quasi-fini en tout point} \end{array}\right.$ $\underset{(1.1)}{\Rightarrow}$ tous les points de la fibre $\varphi^{-1}(s)$ sont isolés dans Z.

(a) $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(s) \cap Z$ possède un nombre fini de points



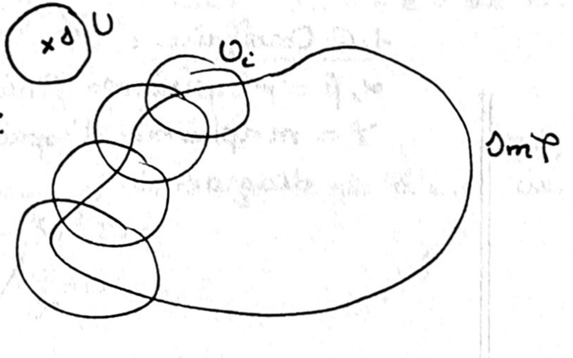
* Supposons que $s \in \operatorname{Im}\varphi$:

Notons $\varphi^i \doteq \varphi'|_{X'_i}$ où X'_i = vois. d'un point d'indice i de $\varphi^{-1}(s) \cap Z$.

$\varphi^i_* F$ est un $\mathcal{O}_S$-module de présentation finie d'après le Th. 1.1 et l'on a clairement $\varphi_* F = \bigoplus_{i \text{ fini}} \varphi^i_* F$ puisque $\Gamma(\varphi^{-1}(U), F) = \bigoplus \Gamma(\varphi_i^{-1}(U), F)$, les ouverts X'_i étant choisis disjoints.

De $\varphi_* F = \bigoplus_{i \text{ fini}} \varphi^i_* F$ on déduit que $\varphi_* F$ est de présentation finie (toujours au voisinage de s) (C'est une tautologie : la notion de $\mathcal{O}_S$-module de présentation finie étant stable par somme directe finie)

* Si $s \notin \operatorname{Im}\varphi$, on suppose que l'on a déjà recouvert $\operatorname{Im}\varphi$ par des voisinages U_i fermés de pts de $\operatorname{Im}\varphi$ où $\varphi_* F|_U$ est de présentation finie. On choisi $s \notin \bigcup_i U_i$ et n'importe quel voisinage U de s ne rencontrant pas $\bigcup_i U_i$. Alors $\varphi_* F|_U = 0$ est de présentation finie, puisque :



(b) $\left\{\begin{array}{l} F = j_* j^{-1} F \quad (j \text{ inclusion fermée}) \\ \varphi_* F = \varphi_* j_* F|_Z = (\varphi|_Z)_* (F|_Z) \text{ et } \varphi|_Z \text{ propre, donc fermée, donc} \\ (\varphi_* F)_{s'} = (F|_Z)_{\varphi|_Z^{-1}(s')} = (F|_Z)_\emptyset = 0 \text{ pour tout } s' \text{ dans } U. \end{array}\right.$

(NB : $s' \notin \varphi(X) \Rightarrow s' \notin \varphi(Z)$)

(4)

On a $\{s \in S \ / \ (\varphi_* F)_s = 0\} = S \setminus \varphi(Z)$ puisque :

* Si $s \in \operatorname{Im}\varphi$, on a vu en (3) que :

$$\varphi_* F = \bigoplus_{i \text{ fini}} \varphi_*^i F \qquad \text{(restrictions sur un voisinage de } s\text{)}$$

d'où $$(\varphi_* F)_s = \bigoplus_{y \in \varphi^{-1}(s) \cap Z} F_y$$

donc :

$(\varphi_* F)_s = 0 \iff F_y = 0 \ \ \forall y \in \varphi^{-1}(s) \cap Z \iff s \notin \varphi(Z)$

* Si $s \notin \operatorname{Im}\varphi$, on fait comme en (b) ci-dessus : on recouvre $\operatorname{Im}\varphi$ par des voisinages fermés pour obtenir $\bigcup U_i$. Si $s \in \bigcup U_i$ c'est fini (tout le problème est local !) sinon, on prend U = voisinage de s n'interceptant pas $\bigcup U_i$. Le calcul (b) précédent donne $\forall s' \in U \quad s' \notin \varphi(Z)$ et on a bien $(\varphi_* F)_{s'} = 0$.

CQFD

1.5 Corollaire : φ fini en x

$\exists X' \ \exists S' \ / \ \varphi' = \varphi|_{X'} : X' \longrightarrow S'$ fini sur S'

(ind : $F = \mathcal{O}_X$, $Z = X$ et * $\forall x' \in X'$ φ quasi-fini en x'
* $\varphi'|_Z$ propre (cf Th 1.1 (a)))

1.6 Corollaire :

α, β = morphismes finis d'espaces analytiques

φ = morphisme d'espaces analytiques faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow^{\alpha} \quad \swarrow_{\beta} & \\ & S & \end{array}$$

et $\tilde{\varphi} : \beta_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow \alpha_* \mathcal{O}_X$.

Alors :

φ isomorphisme d'espaces analytiques $\iff$ $\tilde{\varphi}$ isomorphisme

2. Caractère topologique de la finitude

2.1 Proposition :

$\varphi : X \to S$ $\quad x \in X$ et $\varphi(x) = s$
F = X-module de présentation finie et de support Z.
Alors :
$x \in \varphi^{-1}(s) \cap Z$ est isolé dans $\varphi^{-1}(s) \cap Z \iff F$ est fini en x
(ie $\dim F_x < \infty$)

L'implication ($\Leftarrow$) est triviale (cf Th 1.1 (c) p 65). Montrons l'implication ($\Rightarrow$).

2.1.1 Lemme

A = $\mathbb{C}$-algèbre locale noethérienne
F = A-module de type fini
$\mathfrak{m}$ = idéal maximal de A
Alors :

$$\left.\begin{array}{c}F \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel} \\ \text{de dimension finie}\end{array}\right\} \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad \mathfrak{m}^k F = 0$$

preuve : Une $\mathbb{C}$-algèbre locale noethérienne est un anneau noethérien local structuré en $\mathbb{C}$-algèbre, et qui soit tel que ces structures soient compatibles au sens suivant :

Si $A/\mathfrak{m} \xrightarrow[\sim]{\psi} \mathbb{C}$ désigne l'isomorphisme canonique entre $A/\mathfrak{m}$ et $\mathbb{C}$,
$\dot{a} \longmapsto \lambda$
alors $\forall b \in A \quad \dot{a}\dot{b} = \dot{\widehat{\lambda b}} \in A/\mathfrak{m}$ ie $\dot{\widehat{\lambda b}} \doteq \lambda \dot{b} = \dot{a}\dot{b}$

A vérifier : $A/\mathfrak{m}$ a la même structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, que cette structure provienne de ψ ou de la structure canonique de $\mathbb{C}$-e v de A.

Cette remarque étant faite, on a :

($\Rightarrow$) $\ldots \subset \mathfrak{m}^2 F \subset \mathfrak{m} F \subset F$ est une suite décroissante d'e.v. de dimension finie, donc $\exists k \quad \mathfrak{m}^k F = \mathfrak{m}\,\mathfrak{m}^k F$.
Le lemme de Nakayama montre que $\mathfrak{m}^k F = 0$.

($\Leftarrow$) Si $\mathfrak{m}^k F = 0$, F est structuré en $A/\mathfrak{m}^k$-module (cf : le produit est bien défini car $\mathfrak{m}^k F = 0$) de type fini (car F est déjà un A-module de type fini).

$$A/\mathfrak{m} \qquad \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \mathfrak{m}^{k-1}/\mathfrak{m}^k$$

$A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$; $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ = $A/\mathfrak{m}$-mod de type fini, $A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$; $\mathfrak{m}^{k-1}/\mathfrak{m}^k$ = $A/\mathfrak{m}$-mod de type fini

$A/\mathfrak{m}^k$ est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dim finie

or F est un $A/\mathfrak{m}^k$-mod de type fini, donc F = $\mathbb{C}$-e.v. de dim finie.

CQFD

2.1.2 lemme :

F = X-mod de présentation finie, de support Z
$\varphi : X \to S$
$x \in Z$ isolé dans Z $\Rightarrow$ $\dim F_x < \infty$

preuve :

Notons $j : X \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ l'inclusion fermée. $j_* F$ est le faisceau prolongé par 0 de F. La suite exacte :

$$\mathcal{O}_n/I\big|_X^{\,p} \longrightarrow \mathcal{O}_n/I\big|_X^{\,q} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

donne :

$$\left(\mathcal{O}_n/I\right)^p \longrightarrow \left(\mathcal{O}_n/I\right)^q \longrightarrow j_* F \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

par prolongement par 0.

$(j_* F)_x = F_x$ et $j_* F$ est de présentation finie sur $\mathcal{O}_n$ d'après (1), puisque le conoyau de 2 mod. de prés. finie est de prés. finie. De plus x est encore isolé dans $\mathrm{Supp}(j_* F) = Z$. On peut donc se ramener au cas lisse ie au cas où :

$$X = \mathbb{C}^n.$$

On raisonnera par récurrence sur n :

• $\underset{\sim}{n=1}$: $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{p} \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{q} \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 0$

<u>hyp</u>: 0 isolé dans le support de F.
Si $x \neq 0$, d'après l'hyp. ci-dessus, $F_x = 0$ (le tout restreint au voisinage de 0, comme d'habitude), donc θ_x est surjective et :

$$\text{mat } \theta_x = q \updownarrow \Bigg(\overset{\longleftarrow p \longrightarrow}{\boxed{\delta_q} \qquad} \Bigg)$$

Il existe un mineur $q \times q$ de mat θ_x qui est non nul (passer au quotient par l'idéal maximal $\mathbb{C} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{m}$ d'où $\tilde{\theta}_x : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^q$ surjective)
Ce déterminant δ_q s'écrira donc :

$$\delta_q = x^k u \quad \text{où } u \text{ est une unité.}$$

Si $f_0 \in F_0$ $\exists g_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^q$ / $\pi(g_0) = f_0$.
Montrons qu'alors $x^k g_0 \in \operatorname{Im}\theta$. On résoud :

$$q \updownarrow \Bigg(\overset{\longleftarrow p \longrightarrow}{\underbrace{\boxed{\delta_q}}_{A} \qquad} \Bigg) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x^k g_0 \qquad \text{trouver } e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \end{pmatrix} ?$$

On a $A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \end{pmatrix} = x^k g_0$ et $A^{-1} = \dfrac{{}^t\text{com}A}{\det A}$, $\det A = \delta_q = x^k u$

Donc ${}^t\text{com}A = x^k u A^{-1}$, et il suffit d'avoir :

$$x^k u \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \end{pmatrix} = x^k \, {}^t\text{com}A\,(g_0)$$

$$\Uparrow$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_q \end{pmatrix} = \frac{1}{u} \, {}^t\text{com}A\,(g_0)$$

Cela étant, ~~x^k f_0~~ $x^k f_0 = \pi(x^k g_0) = 0$ car $x^k g_0 \in \operatorname{Im}\theta$, et ceci pour tout $f_0 \in F_0$, donc

$$x^k F_0 = 0$$

$$\Downarrow \ (2.1.1)\ p\,74$$

$$\dim_{\mathbb{C}} F_0 < \infty$$

• <u>Récurrence sur n :</u>

Hyp: 0 isolé dans Z

F = X-mod. de présentation finie, de base $\mathbb{C}^n$, de support Z

$$\begin{array}{ccc} i^{-1}(Z) & & Z \\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/(x_2,\dots,x_n)\Big|_{(x_2,\dots,x_n)=0} & \longleftarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\ i\ } & \mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1} \\ x_1 & \longmapsto & (x_1, 0) \end{array}$$

Rappelons que $i^*F \overset{(1)}{\doteq} \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} i^{-1}F$ où la structure de $i^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$-mod de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ est donnée par la flèche naturelle de $\mathrm{Hom}(i^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$

$$(i^*F)_{x_1} = \mathcal{O}_{\mathbb{C},x_1} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_{(x_1,0)}} F_{(x_1,0)} \quad (1)$$

$$= F_{(x_1,0)}/(x_2,\dots,x_n) \quad \text{car } \mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/(x_2,\dots,x_n)$$

$$\overset{(2)}{=} \mathbb{C} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}})_0} F_{(x_1,0)} \quad \text{car } \mathbb{C} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}}/(x_2,\dots,x_n)$$

Affirmation: $\begin{cases} i^*F \text{ est de présentation finie} \\ x_1 = 0 \text{ est isolé dans le support de } i^*F \end{cases}$

$\mathrm{Supp}(i^*F) \subset i^{-1}Z$ car (1) donne, fibre à fibre,
$(i^{-1}F)_x = 0 \Rightarrow (i^*F)_x = 0$ donc $\mathrm{Supp}(i^*F) \subset \mathrm{Supp}(i^{-1}F) = i^{-1}Z \subset Z$
Ainsi, si 0 est isolé dans Z, il le sera à fortiori dans $\mathrm{Supp}(i^*F)$

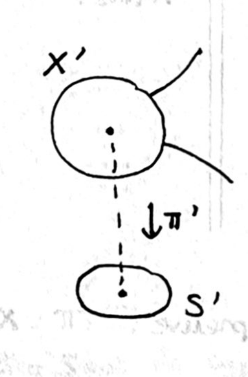
D'après l'hypothèse au rang 1, on a $\dim (i^*F)_0 < \infty$ d'où (cf (2))

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(\mathbb{C} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}}} F_{(x_1,0)} \right)_{x=0} < \infty \qquad (3)$$

On peut donc appliquer le Théorème des morphismes finis pour la situation :

$$\begin{array}{c} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \\ \pi \downarrow \\ \mathbb{C}^{n-1} \end{array} \qquad \text{pour } F \text{ et } 0 \in \mathbb{C}^n,$$

car 1) F est de présentation finie
2) D'après (3), F est quasi-fini en 0.



Alors :
* $\pi'_* F = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}}$-module de présentation finie
* 0 est isolé dans le support de $\pi'_* F$ (cf. Th 1.1 (d)) car $(\pi'_* F)_t = \bigoplus_{y \in \pi'^{-1}(t) \cap Z} F_y = 0$ si X' vois. assez petit, car 0 isolé dans $Z = \operatorname{Supp} F$!)

L'hypothèse de récurrence au rang n−1 implique $\dim_{\mathbb{C}} (\pi'_* F)_0 < \infty$
On a $(\pi'_* F)_0 = F_0$ (Th 1.1 (d)) d'où $\dim_{\mathbb{C}} F_0 < \infty$

CQFD

<u>preuve de la prop. 2.1</u> :

(⇐) trivial (cf Th. 1.1 (c))
(⇒) Notons $\pi^{-1}(s) \xhookrightarrow{i} X$

$\left\{ \begin{array}{l} i^* F \text{ présentation finie} \\ x \text{ isolé dans } Z \cap \pi^{-1}(s) \end{array} \right. \Rightarrow x$ isolé dans $\operatorname{Supp} i^* F$

donc (cf lemme 2.1.2) $\dim (i^*F)_x < \infty$
⇕ (on a : $\dim_{\mathbb{C}} (F_x \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbb{C}) < \infty$ cf Rem 1.2.1 b) p 65 verso)
quasi-finitude en x

CQFD

<u>2.2 Corollaire</u> : $\varphi : X \to S$ est un morphisme fini en x ssi x est isolé dans la fibre $\varphi^{-1}(s)$ où $s = \varphi(x)$.

preuve : C'est 2.1 p 74 avec $F = \mathcal{O}_X$ (compte tenu de la déf. 1.3 p 72)

2.3 Proposition :

X espace analytique
$F = X$ - module de présentation finie
$X_1, \dots, X_p$ espaces analytiques dont les germes en x sont les composantes intègres de X. On a $\{X\} = \{X_1\} \cup \dots \cup \{X_p\}$
Alors :

$$F \text{ fini sur } S \text{ en } x$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall i,\ F_i \text{ fini sur } S \text{ en } x \quad , \text{ où } F_i = F|_{X_i} = \text{faisceau restreint à } X_i$$

preuve : $\pi : X \to S$
$Z = \operatorname{Supp} F$, $Z_i = \operatorname{Supp} F_i$, $Z_i = Z \cap X_i$?

x isolé dans $Z \cap \pi^{-1}(s) \iff F$ fini en x
$\Updownarrow (*)$
x isolé dans $Z_i \cap \pi^{-1}(s) \iff F_i$ fini en x $(\forall i)$

Si l'on montre que $Z_i = Z \cap X_i$, on aura gagné puisque l'équivalence $(*)$ sera assurée.
Montrons donc que $Z_i = Z \cap X_i$:

1) $Z_i \subset Z \cap X_i$ car $F_i = F/_{I_i}$ où $I \subset I_i$, I_i idéal premier minimal
2) $Z \cap X_i \subset Z_i$?
$\forall z \in X_i$ les fonctions de l'idéal I_i s'annulent en z, donc $I_i \subset m_z$ où m_z = idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,z}$.
Ainsi pour tout $z \in X_i$:

$$F_{i,z} = \left(F/_{I_i}\right)_z = F_z/_{I_{i,z}} \quad \text{et } F_{i,z} = 0 \Rightarrow F_z/_{m_z F_z} = 0 \Rightarrow F_z = 0$$
(Nakayama)

$A \subset B$
$p : F \to F/A$
$$F/A \big/ p(B) \simeq F/B$$

cqfd

Chapitre 7 **Faisceaux Cohérents**

Notations : On écrira toujours "de type fini" au lieu de "localement de type fini" pour simplification. Prendre garde. (idem pour "de présentation finie").

1. Définition et premières propriétés :

1.1 Définition :

Soient X un espace annelé et F un X-module.
On dit que F est un faisceau cohérent si :

(a) F est de type fini

(b) Pour tout morphisme $\varphi : \mathcal{O}_X^p|_U \to F|_U$, $\operatorname{Ker}\varphi$ est de type fini.

Cas particulier : $\mathcal{O}_X$, le faisceau structural sur X, sera cohérent ssi il vérifie la prop. (b).

1.2 Remarque : La condition (b) équivaut à la condition (b') qui suit :

(b') Tout sous-X-module de F de type fini est, en fait, de présentation finie

preuve :

(b) ⇒ (b') : Si $G \subset F$ est de type fini, on a une surjection $\mathcal{O}^p \xrightarrow{\pi} G \to 0$ d'où $\mathcal{O}^p \xrightarrow{\pi} G \hookrightarrow F$ (composée φ).

Par hypothèse, $\operatorname{Ker}\varphi$ est de type fini d'où $\mathcal{O}^s \xrightarrow{\theta} \operatorname{Ker}\varphi \to 0$.

Ainsi la suite :

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{i} \mathcal{O}^p \xrightarrow{\pi} G \to 0 \quad \text{est exacte}$$

(cf : $G \hookrightarrow F$ injective ⇒ $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}\varphi$)

ainsi que la suite :

$$\mathcal{O}^s \xrightarrow{i\theta} \mathcal{O}^p \xrightarrow{\pi} G \to 0$$

puisque $\operatorname{Im} i\theta \underset{(\theta\ \text{surj})}{=} \operatorname{Im} i = \operatorname{Ker}\varphi \underset{(G \hookrightarrow F\ \text{inj.})}{=} \operatorname{Ker}\pi$

(b') ⇒ (b) : Si $\varphi : \mathcal{O}^p \to F$, $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous-module de type fini de F, donc il est de présentation finie :

$$\mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^r \to \mathrm{Im}\,\varphi \to 0$$

On peut construire les flèches a_0 et a_1 :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathcal{O}^s & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}^r & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Im}\,\varphi & \to & 0 \\ & & \downarrow a_1 & & \downarrow a_0 & & \downarrow \mathrm{id} \,\| & & \\ 0 & \to & \mathrm{Ker}\,\varphi & \to & \mathcal{O}^p & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathrm{Im}\,\varphi & \to & 0 \end{array}$$

[C'est facile car les modules $\mathcal{O}^r$ et $\mathcal{O}^s$ sont libres, donc projectifs (*)
$\mathrm{id} \circ \beta : \mathcal{O}^r \to \mathrm{Im}\,\varphi$ et φ surjective sur $\mathrm{Im}\,\varphi$ ⇒ $\exists\, a_0$
De même $a_0 \circ \alpha : \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^p$ vérifie $\mathrm{Im}(a_0 \circ \alpha) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$
(car $\varphi \circ a_0 \circ \alpha = \beta \circ \alpha = 0$). On pose donc $a_1 = a_0 \circ \alpha$.]

Le <u>lemme du serpent</u> donne la suite exacte du Ker-Coker :

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{id} = 0 \to \mathrm{Coker}\,a_1 \to \mathrm{Coker}\,a_0 \to \mathrm{Coker}\,\mathrm{id} = 0$$

donc $\mathrm{Coker}\,a_1 \simeq \mathrm{Coker}\,a_0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi / \mathrm{Im}\,a_1 \simeq \mathcal{O}^p / \mathrm{Im}\,a_0$ est de type fini (cf $\mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^p/\mathrm{Im}\,a_0 \to 0$)

Cela étant, on a :

$$0 \to \underbrace{\mathrm{Im}\,a_1}_{\text{de type fini}} \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to \underbrace{\mathrm{Ker}\,\varphi / \mathrm{Im}\,a_1}_{\text{de type fini}} \to 0$$

(cf $\mathcal{O}^s \to \mathrm{Im}\,a_1 \to 0$)

donc $\mathrm{Ker}\,\varphi$ de type fini, d'après le lemme 1.2.1.
Ce qui prouve la remarque 1.2.

(*) Un R-module X est dit projectif si pour toute suite exacte $A \xrightarrow{g} B \to 0$ et morphisme $f : X \to B$, il existe $h : X \to A$ / $g \circ h = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \swarrow h & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{g} & B \to 0 \end{array}$$

Si X est libre, il est projectif (prendre un système générateur et définir h sur 1 tel syst.)

Lemme 1.2.1 : (classique)

A, C de type fini ⇒ B de type fini, où :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathcal{O}^n & & & & \mathcal{O}^k & & \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ & & 0 & & & & 0 & & \end{array}$$

preuve : On peut compléter le diagramme de la sorte :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{O}^n & \xrightarrow{i} & \mathcal{O}^n \oplus \mathcal{O}^k & \xrightarrow{pr_2} & \mathcal{O}^k & \to & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow \alpha u \oplus \varphi & \swarrow \varphi & \downarrow v & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

où φ vérifie $\beta\varphi = v$ (φ existe car $\mathcal{O}^k$ est libre donc projectif)

Les lignes et les colonnes sont exactes et les carrés commutent. En effet :

$$\begin{cases} (\alpha u + \varphi) i (x) = \alpha u(x) \\ \beta(\alpha u \oplus \varphi)(x,y) = \beta(\alpha u(x) + \varphi(y)) = \beta\alpha(u(x)) + \beta\varphi(y) = v(y) \end{cases}$$

car $\beta\alpha = 0$

<u>$\alpha u \oplus \varphi$ est surjective</u> :

$\forall b \in B \quad \beta(b) \in C \Rightarrow \exists y \in \mathcal{O}^k \,/\, v(y) = \beta(b)$

Alors $\varphi(y) - b \in \operatorname{Ker}\beta \Rightarrow \exists a \in A \quad \varphi(y) - b = \alpha(a)$

et $\exists x \in \mathcal{O}^n \,/\, u(x) = a$

de sorte que l'on obtienne bien $b = \alpha u(x) + \varphi(y) \in \operatorname{Im} \alpha u \oplus \varphi$

CQFD

<u>1.2.2 : Remarque</u> : F cohérent ⇒ F de présentation finie.

F vérifie (a) donc $\mathcal{O}^p \xrightarrow{\varphi} F \to 0$, et vérifie (b) donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est de type fini, donc $\mathcal{O}^q \to \operatorname{Ker}\varphi \to 0$.

D'où puisque $\operatorname{Ker}\varphi \hookrightarrow \mathcal{O}^p$ et $\mathcal{O}^q \to \operatorname{Ker}\varphi$ surjective :

$$\mathcal{O}^q \to \operatorname{Ker}\varphi \xhookrightarrow{i} \mathcal{O}^p \xrightarrow{\varphi} F \to 0$$

$$\mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^p \to F \to 0$$

(NB : Si $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{\delta} E$ et si β surjective et γ injective, alors on a la s.e. $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\gamma\beta} D \xrightarrow{\delta} E$)

1.3 lemme : Soit F un X-module,

> (1) F vérifie (a) $\Rightarrow$ tout quotient de F vérifie (a)
> (2) F vérifie (b) $\Rightarrow$ tout sous-module de F vérifie (b)

preuve :

(1) $\mathcal{O}^p \to F \to 0$ (dans la catégorie des faisceaux)

$F \to F/_G \to 0$

On compose les surjections et l'on obtient une surjection (le vérifier fibre à fibre !)

(2) Soit G un sous-module de F et $\varphi : \mathcal{O}_X^p|_U \to G|_U$.

On a : $\mathcal{O}_X^p|_U \xrightarrow{\varphi} G|_U \overset{i}{\hookrightarrow} F|_U$ donc $i\circ\varphi : \mathcal{O}^p \to F$ et donc $\operatorname{Ker} i\circ\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$ de type fini.

CQFD

1.4 lemme :

> (1) Soit $0 \to F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H$ une suite exacte de X-modules.
> Alors :
> $\left.\begin{array}{l} G \text{ vérifie (a)} \\ H \text{ vérifie (b)}\end{array}\right\} \Rightarrow F$ vérifie (a)
>
> (2) Soit $F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \to 0$ une suite exacte de X-modules,
> alors :
> $\left.\begin{array}{l} F \text{ vérifie (a)} \\ G \text{ vérifie (b)}\end{array}\right\} \Rightarrow H$ vérifie (b)

preuve :

(1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & 0 \\
 & & \searrow & & & & \downarrow \\
\mathcal{O}^p & \overset{\eta}{\twoheadrightarrow} & N & \overset{\theta}{- - \to} & & & F \\
 & & & \searrow & & & \downarrow \alpha \\
 & & & & \mathcal{O}^p & \xrightarrow{\Psi} & G \to 0 \\
 & & & & & \underset{\varphi}{\searrow} & \downarrow \beta \\
 & & & & & & H
\end{array}$$

Ψ existe car G de type fini

On peut remonter β en φ car $\mathcal{O}^p$ est libre (définir φ sur la base $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathcal{O}^p$ par $\varphi(e_i) = \beta\circ\Psi(e_i)$)

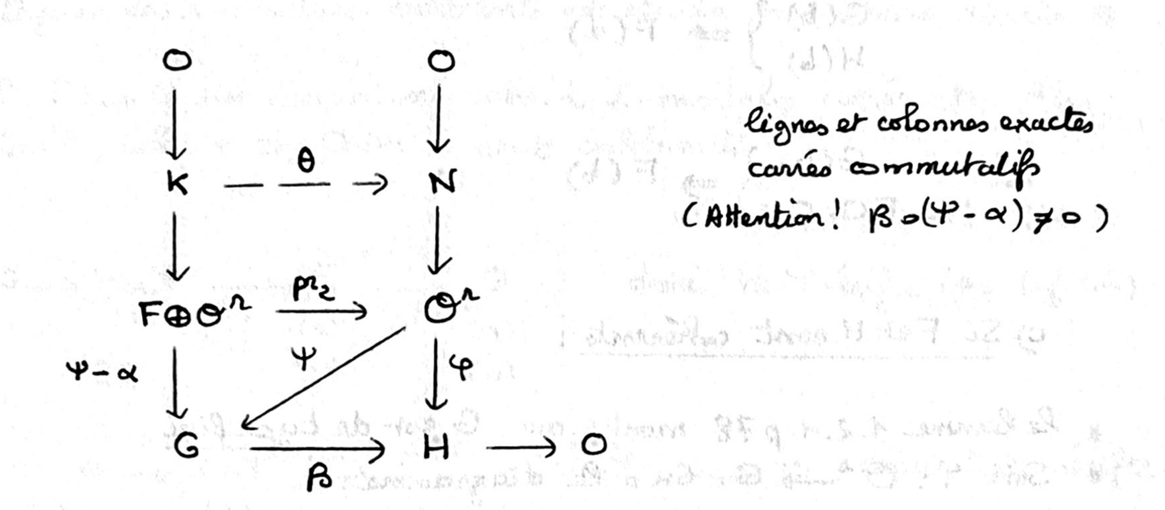
On peut factoriser $\tilde{\Psi} : N \hookrightarrow \mathcal{O}^p \xrightarrow{\Psi} G$ à travers le noyau $\operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha \simeq F$ car $\beta\circ\tilde{\Psi} = 0$, pour obtenir θ.

Alors θ est surjective : $\forall a \in F$ $\alpha(a) \in G$ $\exists b \in \mathcal{O}^p /$ $\Psi(b) = \alpha(a)$

mais $\varphi(b) = \beta\circ\Psi(b) = \beta\circ\alpha(a) = 0$ donc $b \in N$ et $\tilde{\Psi}(b) = \alpha(a)$

implique par déf. $\theta(b) = a$. CQFD

(2) Soit $\mathcal{O}^n \xrightarrow{\varphi} H$. On a le diagramme :



Ψ = relevé de φ (existe car $\mathcal{O}^n$ est libre donc projectif)

$K = \mathrm{Ker}(\Psi - \alpha)$ <u>est de type fini</u> car $F \oplus \mathcal{O}^n$ l'est et G vérifie (b) (c'est le (1) ci-dessus !)

On obtient θ en factorisant $pr_2' : K \longrightarrow F \oplus \mathcal{O}^n \xrightarrow{pr_2} \mathcal{O}^n$ (qui vérifie $\varphi \circ pr_2' = 0$) à travers le noyau $\mathrm{Ker}\,\varphi = N$.

<u>θ est surjective</u> : $\forall n \in N \subset \mathcal{O}^n \; \exists (x,y) \in F \oplus \mathcal{O}^n \, / \, \begin{cases} \Psi(y) - \alpha(x) = 0 \\ \text{et} \\ \theta(x,y) = y = n \end{cases}$?

ie $\exists x \in F \, / \, \Psi(n) - \alpha(x) = 0$?

On a : $\beta(\Psi(n)) = \varphi(n) = 0$ car $n \in N$ donc $\Psi(n) \in \mathrm{Ker}\,\beta = \mathrm{Im}\,\alpha$

CQFD

Le lemme 1.4 facilite la démonstration de :

<u>1.5 Théorème</u> : Si dans une suite exacte de X-modules

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

2 modules sont cohérents, le 3e l'est aussi. Autrement dit, le quotient de 2 cohérents est cohérent (cas particulier où $H = G/F$)

preuve :

a) <u>Si F et G cohérents</u>, $\left.\begin{matrix} F(a) \\ G(b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow H(b)$ (lire " H vérifie la propriété (b) ")

$\left.\begin{matrix} G(a) \\ H = \text{quotient de } G \end{matrix}\right\} \Rightarrow H(a)$

b) Si G et H sont cohérents :

$$\left.\begin{array}{l} G(a) \\ H(b) \end{array}\right\} \Rightarrow F(a)$$

$$\left.\begin{array}{l} G(b) \\ F \hookrightarrow G \end{array}\right\} \Rightarrow F(b)$$

c) Si F et H sont cohérents :

* le lemme 1.2.1 p 78 montre que G est de type fini.
* Soit $\varphi : \mathcal{O}^s \longrightarrow G$. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & H & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \tilde{\varphi} & & \uparrow \varphi & & & & \\
 & & & & \mathcal{O}^s & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
 & & \operatorname{Ker} \beta\circ\varphi & & & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
 & & \operatorname{Ker} \varphi & & & & & & \\
 & & \uparrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

$\beta\circ\varphi = 0$, donc $\operatorname{Ker} \beta\circ\varphi \to \mathcal{O}^s \xrightarrow{\varphi} G$ se factorise à travers le noyau de β ie $\operatorname{Im} \alpha \simeq F$ pour donner $\tilde{\varphi}$.

$$\left.\begin{array}{l} F(b) \\ H(b) \Rightarrow \operatorname{Ker} \beta\circ\varphi \text{ de type fini} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \text{ vérifie (a) d'après lemme 1.4.}$$

Ce qui prouve le Théorème 1.5.

1.6 Corollaire

(1) La catégorie des X-modules cohérents est stable par somme directe $\oplus$

(2) Soit $\varphi : F \to G$ un morphisme entre 2 X-modules cohérents. Alors $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Coker}\varphi$ et Coim sont cohérents.

preuve :

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to \underset{\substack{(a)\\(b)}}{F} \to \underset{\substack{(a)\\(b)}}{G}$$ donc $\operatorname{Ker}\varphi$ vérifie (a) (cf 1.4)

Mais alors : $0 \to \underset{(a)}{\operatorname{Ker}\varphi} \to \underset{\substack{(a)\\(b)}}{F} \to \operatorname{Im}\varphi \to 0$ donc $\operatorname{Im}\varphi$ vérifie (b)

D'ailleurs F vérifie (a) $\Rightarrow$ $\operatorname{Im}\varphi$ vérifie (a) comme quotient de F $\left(\operatorname{Im}\varphi = F/\operatorname{Ker}\varphi\right)$ (cf lemme 1.3)

Finalement $\operatorname{Im}\varphi$ est cohérent. Mais alors la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to F \to \operatorname{Im}\varphi \to 0$$

et le Th. 1.5 montrent que $\operatorname{Ker}\varphi$ est aussi cohérent.
Le Th 1.5 montre aussi que $\operatorname{Coker}\varphi = G/\operatorname{Im}\varphi$ et $\operatorname{Coim}\varphi = F/\operatorname{Ker}\varphi$ sont cohérents comme quotients de 2 cohérents, ce qui achève de montrer le (2).
Le (1) est évident car :

$$0 \to F \xrightarrow{i} F \oplus G \xrightarrow{pr_2} G \to 0$$ est exacte.

CQFD

1.7 Corollaire : F, G = X-modules cohérents

Alors $\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(F,G)$ est cohérent, et $F \otimes_{\mathcal{O}_X} G$ est cohérent.

preuve : D'après la remarque 1.2.2, cohérent $\Rightarrow$ représentation finie, donc :

$$\mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^s \to F \to 0$$

d'où $$0 \to \operatorname{Hom}(F,G) \to \underset{\underset{G^s}{\parallel}}{\operatorname{Hom}(\mathcal{O}^s, G)} \xrightarrow{\varphi} \underset{\underset{G^p}{\parallel}}{\operatorname{Hom}(\mathcal{O}^p, G)}$$ (car $\mathcal{O}^p$ libre)

$Hom(F,G) = \mathrm{Ker}\,\varphi$ est donc cohérent d'après 1.6.

De la même manière :

$$\begin{array}{ccccccc} G\otimes\mathcal{O}^p & \longrightarrow & G\otimes\mathcal{O}^s & \longrightarrow & G\otimes F & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \| & & & & \\ G^p & & G^s & & & & \end{array}$$

car $\otimes$ est un foncteur exact à droite, donc $G\otimes F$ est cohérent en vertu de 1.6.

CQFD

1.8 Proposition : Soit $F' \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} F''$ un complexe de faisceaux de X-modules cohérents (ie une suite semi-exacte, ie $\psi\circ\varphi = 0$). Si ce complexe est une suite exacte en un point x, il est alors exact localement autour de x.

preuve : Soit $\mathrm{Ker}\,\psi_x = \mathrm{Im}\,\varphi_x$ et $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\,\psi$.
$\mathrm{Im}\,\varphi$ et $\mathrm{Ker}\,\psi$ sont cohérents donc :

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}\,\psi / \mathrm{Im}\,\varphi = \text{faisceau cohérent} \\ \left(\mathrm{Ker}\,\psi / \mathrm{Im}\,\varphi\right)_x = 0 \end{cases}$$

La proposition résulte alors du lemme suivant :

lemme : $\mathcal{G}$ faisceau cohérent tel que $\mathcal{G}_x = 0$. Alors $\mathcal{G}|_U = 0$ où U est un voisinage de x.
Comme $\mathcal{G}$ est de type fini, au voisinage de x $\mathcal{G}|_U$ est engendré par des sections globales sur un U, ie :

$$\exists U \Subset X \quad x\in U \qquad \mathcal{O}^m_X|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U \longrightarrow 0$$
$$(1,0,\dots,0) \longmapsto \lambda_1 \in \mathcal{G}(U) \qquad \text{etc}\dots$$

(cf chap 3. 10.3 p 37 verso)

Mais $\lambda_{1,x} = 0 \Rightarrow \exists V_1$ voisinage ouvert de x / $\lambda_1|_{V_1} = 0$

Finalement $\mathcal{G}|_U = 0$

CQFD

1.9 Proposition : Soit X un espace annelé. Si $\mathcal{O}_X$ est cohérent, on a l'équivalence :

F est X-cohérent $\iff$ F est de présentation finie

preuve : ($\Rightarrow$) cf 1.2.2

($\Leftarrow$) On utilise le Th 1.5 :

$$\mathcal{O}_X^p \longrightarrow \mathcal{O}_X^s \longrightarrow F \longrightarrow 0 \quad \text{est exacte}$$

$\mathcal{O}_X^s$ et $\mathcal{O}_X^p$ = $\mathcal{O}_X$-cohérent comme somme directe de cohérents, donc F apparaît comme le conoyau de $\mathcal{O}_X$-cohérents, donc cohérent.

CQFD

1.10 Proposition :

X espace annelé de faisceau structural $\mathcal{O}_X$ cohérent

F = X-module cohérent

Si $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que l'on ait la suite exacte :

$$L_p|_U \longrightarrow L_{p-1}|_U \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0|_U \longrightarrow F|_U \to 0$$

où $L_k|_U \doteq \mathcal{O}_X^{n(k)}|_U$

preuve :

$$\mathcal{O}^s|_U \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{O}^p|_U \xrightarrow{\varphi_0} F|_U \longrightarrow 0 \quad \text{pour } U \text{ convenable.}$$

$\text{Ker}\,\varphi_1$ est cohérent (comme noyau de φ_1 entre 2 cohérents) donc $\exists V$ vois. ouv. de x tel que $\mathcal{O}^k|_V \to \text{Ker}\,\varphi|_V \to 0$

Les 2 suites exactes se recollent (comme dans la NB de la remarque 1.2.2) pour donner :

$$\mathcal{O}^k|_V \to \mathcal{O}^k|_V \longrightarrow \mathcal{O}^p|_V \longrightarrow F|_U \longrightarrow 0$$

etc...

CQFD

2. Théorème d'Oka

‖ 2.1 Théorème d'Oka : $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ est cohérent

‖ 2.2 Corollaire : Si X est un espace analytique, $\mathcal{O}_X$ (son faisceau structural) est cohérent.

preuve du corollaire : Localement $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I \big|_{\mathrm{Supp}\,\mathcal{O}/I}$ où I est un idéal de type fini

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{O}^s \to I \to 0 \\ 0 \to I \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/I \to 0 \end{array}\right\} \underset{(1.2.2)}{\Rightarrow} \mathcal{O}^s \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/I \to 0$$ donc $\mathcal{O}/I$ est cohérent d'après 2.1 et 1.9.

Que dire de $\mathcal{O}/I \big|_{\mathrm{Supp}\,\mathcal{O}/I}$?

$\mathcal{O}_X$ est trivialement un $\mathcal{O}_X$-module de type fini. Il faut montrer la propriété (b) pour $\mathcal{O}_X$: Soit $\varphi : \mathcal{O}_X^p \longrightarrow \mathcal{O}_X$. Il faut montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est de type finie. On a :

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \longrightarrow \underbrace{\mathcal{O}^p/I\big|_K}_{\text{lire } (\mathcal{O}/I)^p|_K} \overset{\varphi}{\longrightarrow} \mathcal{O}/I\big|_K \qquad \text{où } K = \operatorname{Supp} \mathcal{O}/I = \text{fermé}$$

Si $j : K \hookrightarrow \mathbb{C}^n$, j_* est le "prolongement par 0". Comme j_* est un foncteur exact, on a : (cf (**) p 67)

$$0 \to j_*\operatorname{Ker}\varphi \to \mathcal{O}^p/I \overset{j_*\varphi}{\longrightarrow} \mathcal{O}/I$$

donc $j_*\operatorname{Ker}\varphi \simeq \operatorname{Ker}(j_*\varphi)$ est donc de type fini.

j^{-1} est un foncteur exact :

$$0 \to \underset{\underset{\operatorname{Ker}\varphi}{\wr\wr}}{j^{-1}j_*\operatorname{Ker}\varphi} \longrightarrow \mathcal{O}^p/I\big|_K \overset{\varphi}{\longrightarrow} \mathcal{O}/I\big|_K$$

(*) Comme $j_*\operatorname{Ker}\varphi$ est de type fini, $j^{-1}j_*\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$ aussi. En effet :

$$(\mathcal{O}/I)^k \longrightarrow j_*\operatorname{Ker}\varphi \to 0 \qquad \text{comme } (\mathcal{O}/I)\text{-modules},$$

en appliquant j^{-1} : $\underset{\underset{(\,)|_K}{\parallel}}{j^{-1}}$ $(\mathcal{O}/I)^k|_K \to j^{-1}j_*\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi \to 0$ comme $(\mathcal{O}/I)|_K$-mod

ce qui prouve 2.2.

Notons le lemme :

<u>lemme</u> : Si $X \xrightarrow{\lambda} Y$ (avec $B \downarrow Y$), $F = B$-module de type fini $\Rightarrow \lambda^{-1}F$ est un $\lambda^{-1}B$-module de type fini. (appliquer λ^{-1} exact)

utilisé en (*) ci-dessus.

<u>preuve du Théorème d'Oka</u>

Posons $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} = {}_n\mathcal{O}$. Il s'agit de montrer que pour tout morphisme ${}_n\mathcal{O}^m|_U \xrightarrow{\varphi} {}_n\mathcal{O}|_U$ donné localement sur un ouvert, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est de type fini quitte à restreindre U.

On notera :

$$\begin{array}{ccc} {}_n\mathcal{O}^m|_U & \xrightarrow{\varphi} & {}_n\mathcal{O}|_U \\ (1,0,\dots,0) & \longmapsto & f_1 \in {}_n\mathcal{O}(U) \\ \dots\dots & & \\ (0,\dots,0,1) & \longmapsto & f_m \in {}_n\mathcal{O}(U) \end{array}$$

- Si $n = 0$, ${}_0\mathcal{O} = \mathbb{C}$ est un espace vectoriel et il n'y a rien à montrer.
- Si $m = 1$ (n quelconque), c'est évident, puisque

$$g_x \xrightarrow{\varphi_x} g_x f_1$$

φ_x est un morphisme de ${}_n\mathcal{O}_x$ modules. De 2 choses l'une :

$$\nearrow f_{1,x} = 0 \Rightarrow \exists V \text{ vois. ouv. de } x \quad f_1|_V = 0$$

$$\searrow f_{1,x} \neq 0 \Rightarrow \exists V \text{ vois. ouv. de } x \quad f_1|_V \neq 0$$

ce qui prouve que φ est soit nulle (ie $\mathrm{Ker}\,\varphi = {}_n\mathcal{O}^1$) soit injective (ie $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$) sur V.

- On va procéder par récurrence sur n. Soit $n > 1$ et supposons le Théorème d'Oka vrai aux rangs $< n$. Soit $m \geq 1$, et prenons $x = 0 \in U$. Envisageons plusieurs cas suivant $f_1, \dots, f_m$:

α) <u>f_1 est une unité (ie $f_1(0) \neq 0$)</u>

$$\begin{array}{ccc} {}_n\mathcal{O}^m|_U & \xrightarrow{\varphi} & {}_n\mathcal{O}|_U \\ (g_1,\dots,g_m) & \longmapsto & \sum_{i=1}^m g_i f_i \end{array}$$

$(g_1,\dots,g_m) \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} g_i f_i = 0$ donc quitte à diminuer l'ouvert U, je peux écrire $g_1 = -\frac{1}{f_1}\left(\sum_{j\geq 2} g_j f_j\right)$ où $\frac{1}{f_1} \in {}_n\mathcal{O}(U)$

D'où un isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules :

$$
\begin{array}{ccc}
{}_n\mathcal{O}^{m-1}|_U & \xrightarrow{\ \simeq\ } & \operatorname{Ker}\varphi \\
(g_2,\dots,g_m) & \longmapsto & \left(-\frac{1}{f_1}\sum_{j\geq 2} g_j f_j \,, g_2,\dots,g_m\right)
\end{array}
$$

$\operatorname{Ker}\varphi$ est donc de type fini.

β) Cas où $f_1(0) = \dots = f_m(0) = 0$

Choisissons z_n / $\forall i \in [1,m]$ $f_i(z_n,0) \not\equiv 0$. Le Théorème de préparation de Weierstrass (chap 4. Prop 2.4 p 43) montre que l'on peut écrire localement :

$$f_i(z) = \left(z_n^{d_i} + a_{1,i}(z')\, z_n^{d_i-1} + \dots + a_{d_i,i}(z')\right) \omega_i(z)$$

où $a_{i,j}(0) = 0$ et où les $\omega_i(z)$ sont des unités.

Notons brièvement $f_i = g_i\,\omega_i$ où g_i est un polynôme de Weierstrass au point 0 par rapport à la variable z_n.
Le diagramme :

$$
\begin{array}{ccc}
{}_n\mathcal{O}|_U^m & \xrightarrow{\ \varphi\ } & {}_n\mathcal{O}|_U \\
\begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n \end{pmatrix} \Big\downarrow \wr & & \| \\
{}_n\mathcal{O}|_U^m & \xrightarrow[(g_1,\dots,g_m)]{} & {}_n\mathcal{O}|_U
\end{array}
$$

est commutatif.

donc $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}(g_1,\dots,g_m)$. On s'est ramené au cas où tous les polynômes $f_1,\dots,f_m$ sont de Weierstrass par rapport à la même variable z_n. C'est le cas γ) qui suit :

8) Cas où : $\varphi = (f_1, \dots, f_m) : {}_n\mathcal{O}^m|_U \longrightarrow {}_n\mathcal{O}|_U$ et où chaque fonction f_i est un polynôme de Weierstrass par rapport à la variable z_n.
Notons

$$f_i(z) = z_n^{d_i} + a_{1,i}(z')\, z_n^{d_i - 1} + \dots + a_{d_i,i}(z') \qquad a_{i,j}(0) = 0$$

$$d = \operatorname{Sup}(\deg_{z_n} f_i)$$

$$a_{i,j}(z') \in {}_{n-1}\mathcal{O}(U') \quad \text{où} \quad U \subset U' \times \mathbb{C}$$

$$pr_1 : U' \times \mathbb{C} \longrightarrow U'$$

$$\mathcal{R} = pr_1^{-1}({}_{n-1}\mathcal{O}|_{U'}) \xhookrightarrow{pr_1^*} {}_n\mathcal{O}_{U' \times \mathbb{C}}$$

$\mathcal{R}[z_n]_{2d}$ = esp. vect des polynomes de degrés $< 2d$ et à coeff. dans $\mathcal{R}$.

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} {}_n\mathcal{O}^m & \xrightarrow[\varphi]{(f_1,\dots,f_m)} & {}_n\mathcal{O} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{R}[z_n]_{2d} & \xrightarrow[\psi]{(f_1,\dots,f_m)} & \mathcal{R}[z_n]_{3d} \end{array}$$

lemme 2.1.1 :

$f : X \longrightarrow Y$
$F = \mathcal{O}_Y$ - module cohérent $\Big\} \Rightarrow f^{-1}(F)$ est un $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-module cohérent

preuve : $f^{-1}(F)$ est de type fini car f^{-1} est un foncteur exact et $f^{-1}(\mathcal{O}_Y^p) = f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^p$.
Soit $\varphi : f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^p|_U \longrightarrow f^{-1}(F)|_U$. Montrons que $\ker\varphi$ est de type fini.

$(1, 0, \dots, 0) \longmapsto g_1$
- - - - - - - - - -
$(0, 0, \dots, 0, 1) \longmapsto g_p$

$$\begin{array}{ccc} & \overset{g_1}{\nearrow} & F \\ & & \downarrow\uparrow h_1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Quitte à restreindre U, $g_i = h_i \circ f$ où $h_i \in F(V)$ $V \Subset Y$ et $f(U) \subset V$. Posons :

$\mathcal{O}_Y^p(V) \xrightarrow{\psi} F(V)$ — $\ker\psi$ est de type fini par hypothèse,
$(1, 0, \dots, 0) \longmapsto h_1$ — donc $\mathcal{O}_Y^q \longrightarrow \ker\psi \longrightarrow 0$
$(0, \dots, 0, 1) \longmapsto h_p$ — et donc $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)^q \longrightarrow f^{-1}\ker\psi \longrightarrow 0$

Mais $f^{-1}(\ker\psi) = \ker\varphi$ donc $\ker\varphi$ est bien de type fini.

$u = v \circ f \longmapsto v$ localement

<u>Conséquence</u> : $\mathcal{R}$ est cohérent par hypothèse de récurrence.

$\mathcal{R}[z_n]_{2d}$ est un $\mathcal{R}$-module libre de type fini, somme directe de $2d$ modules cohérents, donc $\mathcal{R}[z_n]_{2d}$ est cohérent.

Donc $\operatorname{Ker}\Psi$ est de type fini.

On aura montré que $\operatorname{Ker}\varphi$ est de type fini si nous arrivons à montrer que :

$$\forall u \in U' \times \mathbb{C} \qquad \operatorname{Ker}\varphi_u = (\operatorname{Ker}\Psi_u)\cdot({}_n\mathcal{O}_u) \qquad (1)$$

1) <u>Hypothèse forte</u> :

Hyp. $\begin{cases} f_1(z) = z_n^{d_1} + a_{1,1}(z')z_n^{d_1-1} + \dots + a_{d_1,1}(z') \qquad a_{i,j} \in \mathcal{O}(U') \quad a_{i,j}(0)=0 \\ \text{est de Weierstrass au point } u=(u',u'') \in U' \times \mathbb{C} \text{ voisin de } 0 \text{, ie} \\ \quad \begin{cases} f_1(z) = (z_n-u'')^{e_1} + b_{1,1}(z'-u')(z_n-u'')^{e_1-1} + \dots + b_{e_1,1}(z'-u') \\ b_{i,j}(0)=0 \end{cases} \end{cases}$

Alors $e_1 = d_1 \leq d$ et :

$$(\chi_1, \dots, \chi_m) \in (\operatorname{Ker}\varphi)_u \iff \sum_{i=1}^m \chi_i f_i = 0$$

Le théorème de division de Weierstrass permet d'écrire :

$$\begin{cases} \chi_{2,u} = f_{1,u}\, a_{2,u} + b_{2,u} \\ \dots\dots\dots \\ \chi_{m,u} = f_{1,u}\, a_{m,u} + b_{m,u} \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a_{i,u} \in {}_n\mathcal{O}|_U \\ b_{j,u} \in \mathcal{R}[z_n]_d \end{cases}$$

de sorte que $(\chi_1, \dots, \chi_m) \in (\operatorname{Ker}\varphi)_u$ ssi :

$$\underbrace{(\chi_{1,u} + f_{2,u}a_{2,u} + \dots + f_{m,u}a_{m,u})}_{b_1}\underbrace{f_{1,u}}_{\substack{\text{polynôme de} \\ \text{Weierstrass en } u}} + \underbrace{b_{2,u}f_{2,u} + \dots + b_{m,u}f_{m,u}}_{\in \mathcal{R}[z_n]_{2d}} = 0 \qquad (2)$$

(2) $\Rightarrow$ b_1 est un polynôme en z_n au voisinage de u (*). En effet :

<u>lemme</u> : $fg = h \in \mathcal{R}[z_n]_d$ où $h = a_0(z')z_n^d + \dots + a_d(z')$; $g = \sum_{i \geq 0} \lambda_i(z') z^i$; $f = z_n^p + c_1(z')z_n^{p-1} + \dots + c_p(z')$ polynôme de Weierstrass en z_n ($c_i(0)=0$). Alors g est un polynôme en z_n.

preuve : égalité des coeff. en $k \geq d+1$:

$$(I) \begin{cases} 0 = c_p(z')\lambda_{d+1}(z') + c_{p-1}(z')\lambda_d(z') + \dots + \lambda_{d+1-p}(z') & (\text{en } z_n^{d+1}) \\ 0 = c_p(z')\lambda_{d+2}(z') + c_{p-1}(z')\lambda_{d+1}(z') + \dots + \lambda_{d+2-p}(z') & (\text{en } z_n^{d+2}) \\ \dots \text{ etc} \end{cases}$$

(I) et $c_i(0)=0 \Rightarrow \lambda_{d+1-p}(0) = 0$

donc $\lambda_{d+1-p}(z') \in \mathfrak{M}$ = idéal maximal de $\mathcal{O}_{z'}$. De même $\lambda_i(z') \in \mathfrak{M}$ $\forall i \geq d+1-p$. Mais alors le système (I) montre que $\lambda_i(z') \in \mathfrak{M}^2$ pour $i \geq d+1-p$ et ainsi de suite.

Finalement $\lambda_i(z') \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}^k = 0$ $\forall i \geq d+1-p$ (cf Th. Krull : $\bigcap_{k \geq 0} \mathfrak{M}^k = 0$ si l'anneau est local noethérien)

CQFD

((*) NB : $(1-z)\sum z^n = 1$ et $\sum z^n$ non polynôme, car $1-z$ non de Weierstrass en 0.)

Alors :

$$(x_1,\dots,x_m)_u = (b_1,\dots,b_m) + (-(f_2 a_2+\dots+f_m a_m), f_1 a_2, \dots, f_1 a_m)_u$$

$$= \underbrace{(b_1,\dots,b_m)}_{\in \operatorname{Ker}\Psi_u} + a_2 \underbrace{(-f_2, f_1, 0, \dots, 0)}_{\in \operatorname{Ker}\Psi_u} + \dots + a_m \underbrace{(-f_m, 0, \dots, 0, f_1)}_{\in \operatorname{Ker}\Psi_u}$$

d'après (2), et puisque $b_1,\dots,b_m$ sont des polynômes en z_n donc dans $\mathbb{R}[z_n]_{2d}$; car $f_1(-f_2)+f_2(f_1)=0$

Finalement, cela signifie bien que $\operatorname{Ker}\Psi_u \subset {}_n\mathcal{O}_u . \operatorname{Ker}\Psi_u$ donc (1).

§2) <u>Si on n'a pas l'hypothèse forte</u>, on aura toujours $f_1 = e f$ où $e \in {}_n\mathcal{O}_u$ est une unité et f est un polynôme de Weierstrass en u (cf Th. de préparation de Weierstrass).

$$\begin{array}{ccc} {}_n\mathcal{O}_u^m & \xrightarrow[\theta]{(f, f_2, \dots, f_m)} & \mathcal{O}_u \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}[z_n]_{2d} & \xrightarrow{\Xi_u} & \mathbb{R}[z_n]_{3d} \end{array}$$

En notant $\theta = (f, f_2, \dots, f_m)$, on a, d'après le cas §1) ci-dessus :

(1) $\operatorname{Ker}\theta_u = ({}_n\mathcal{O}_u).(\operatorname{Ker}\Xi_u)$

Il suffit alors de remarquer que :

$$(x_1,\dots,x_m) \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \left(x_1, \frac{x_2}{e}, \dots, \frac{x_m}{e}\right) \in \operatorname{Ker}\theta$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x_1 f_1 + \dots + x_m f_m = 0 \iff x_1 f + \frac{x_2}{e} f_2 + \dots + \frac{x_m}{e} f_m = 0$$

Donc d'après (1) pour θ_u :

$$(x_1,\dots,x_m) \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \left(x_1, \frac{x_2}{e}, \dots, \frac{x_m}{e}\right) = \sum_{j \in J \text{ fini}} d_j \beta_j \qquad (3)$$

où $\beta_j = (\beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,m}) \in \operatorname{Ker}\Xi_u$

Mais alors $\tilde{\beta}_j = (\beta_{j,1}, e\beta_{j,2}, \dots, e\beta_{j,m}) \in \operatorname{Ker}\Psi_u$ de sorte que

(3) donne : $(x_1,\dots,x_m) = \sum_{j \in J} d_j \tilde{\beta}_j \qquad d_j \in {}_n\mathcal{O}_u \quad \tilde{\beta}_j \in \operatorname{Ker}\Psi_u$

ce qui prouve bien la formule (1) dans le cas général.

Chapitre 8 — Etude locale d'un espace analytique.

1. Position d'un espace analytique en un point.

1.1 Définition : (X,x) espace analytique pointé
E = e.v. de dim finie

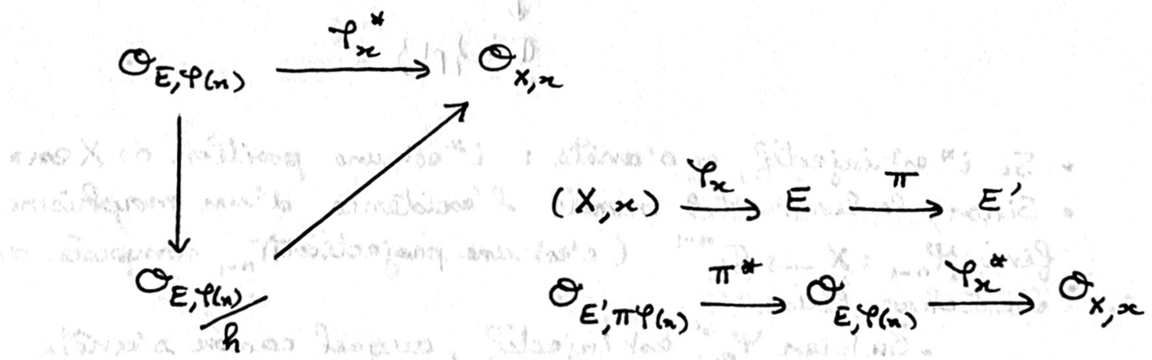
Une position de X en x est la donnée d'un germe $\varphi_x : (X,x) \longrightarrow E$ de morphisme fini (cf 1.3 p72) dont le comorphisme $\varphi_x^* : \mathcal{O}_{E,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif.

1.2 Lemme : Soit $\varphi_x : (X,x) \longrightarrow E$, E e.v de dim finie. Supposons que φ_x soit fini et φ_x^* non injectif. Alors il existe un sous-espace vectoriel $E' \subsetneq E$ et un germe de morphisme fini $\psi_x : (X,x) \longrightarrow E'$.

preuve :
Comme φ_x^* n'est pas injective, $\exists h \in \mathcal{O}_{E,\varphi(x)}$ $\varphi_x^*(h) = 0$ et h non identiquement nulle, donc on peut choisir une coordonnée z_n dans E de sorte que :

$$h(z_n, 0) \not\equiv 0$$

Soit E' le sous-espace vectoriel de E défini par les coordonnées $(z_1, \dots, z_{n-1}) = z'$ complémentaires. On a :



$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{E,\varphi(x)} & \xrightarrow{\varphi_x^*} & \mathcal{O}_{X,x} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{O}_{E,\varphi(x)}/h & & \end{array} \qquad (X,x) \xrightarrow{\varphi_x} E \xrightarrow{\pi} E'$$

$$\mathcal{O}_{E',\pi\varphi(x)} \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}_{E,\varphi(x)} \xrightarrow{\varphi_x^*} \mathcal{O}_{X,x}$$

où l'on note $\pi : E \longrightarrow E'$
$(z_n, z') \longmapsto z'$

Le théorème de Weierstrass (2.3 p42) montre que $\mathcal{O}_{E,\varphi(x)}/h$ est un $\mathcal{O}_{E',\pi\varphi(x)}$-module de type fini.

φ_x fini $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{E,\varphi(x)}$-module de type fini, donc à fortiori $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{E,\varphi(x)}/h$ - module de type fini (*).

Finalement $\mathcal{O}_{X,x}$ est bien un $\mathcal{O}_{E',\pi\varphi(x)}$-module de type fini, ie $\pi \circ \varphi_x$ est fini.
CQFD

(*) la structure de $\mathcal{O}_{X,x}$ est donnée grâce au comorphisme $\varphi_x^* : \mathcal{O}_{E,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$,
$\forall g \in \mathcal{O}_{X,x}$ $h.g \doteq \varphi_x^*(h).g = 0$ ici, puisque $h \in \operatorname{Ker} \varphi_x^*$.

1.3 Proposition : Soit (X,x) un germe d'espace analytique. Il existe une position de X en x.

preuve : Localement, l'espace analytique X peut être plongé dans $\mathbb{C}^n$. En effet, $X = (n, U, f_1, \dots, f_p)$ est localement un modèle d'espace analytique, et $X \overset{i}{\hookrightarrow} U \Subset \mathbb{C}^n$ est une injection analytique

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_U/(f_1,\dots,f_p)|_X & \xleftarrow[\text{abus}]{i^*} & \mathcal{O}_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \overset{i}{\hookrightarrow} & U \end{array}$$

[$i^* : i^{-1}\mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_X$ est le passage au quotient. En effet $i^* : \mathcal{O}_U|_X = i^{-1}\mathcal{O}_U \longrightarrow \left(\mathcal{O}_U/(f_1\dots f_p)\right)\Big|_X = \mathcal{O}_U|_X/(f_1,\dots,f_p)|_X$ est un morphisme de faisceaux car le foncteur restriction $|_X = i^{-1}(.)$ est exact. On passe donc au quotient puis on prend la restriction.]

i est un morphisme fini (cf 2.2 p 76) mais i^* n'est pas injectif en général.

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i}{\hookrightarrow} & U \Subset \mathbb{C}^n \\ & \searrow^{\varphi_{n-1}} & \downarrow \pi_{n-1} \\ & & \mathbb{C}^{n-1} \\ & & \downarrow \pi_{n-2} \\ & & \vdots \\ & & \downarrow \pi_0 \\ & & \mathbb{C}^0 = \{pt\} \end{array}$$

- Si i^* est injectif, on s'arrête : i^* est une position de X en x.
- Sinon, le lemme 1.2 montre l'existence d'un morphisme fini $\varphi_{n-1} : X \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ (c'est une projection π_{n-1} composée avec i)
  De 2 choses l'une :
  - Ou bien φ_{n-1}^* est injectif, auquel cas on s'arrête
  - Ou bien φ_{n-1}^* n'est pas injectif. On applique encore le lemme 1.2 pour obtenir $\varphi_{n-2} : X \longrightarrow \mathbb{C}^{n-2}$.

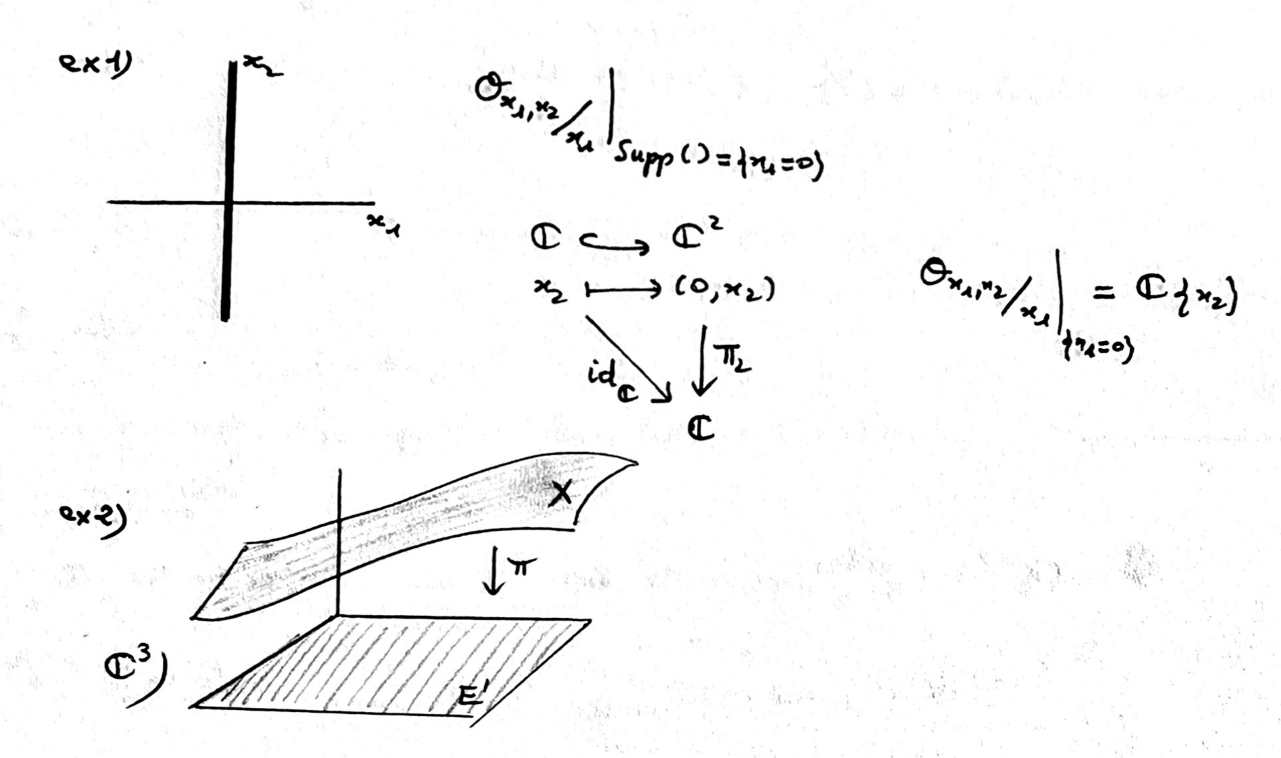
  etc...

On est sûr de trouver $k \in [0,n]$ tel que $\varphi_k : X \to \mathbb{C}^k$ soit un morphisme fini tel que φ_k^* injectif puisque pour $k=0$, $\mathbb{C}^0 = \{pt\}$ et $\mathcal{O}_{\{pt\}} \doteq \mathbb{C}$, donc

$$\mathcal{O}_{\{pt\}} = \mathbb{C} \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, i(x)} \xrightarrow{i^*} \mathcal{O}_{X,x}$$

injectif
(envoie 1 sur 1, puisque ces morphismes sont unitaires)
(le voir fibre à fibre !)

NB : On a en fait montré que si $X \simeq (n, U, f_1, \dots, f_p)$, $\exists \pi : U \to E'$ projection qui induit une position $\pi \circ i : X \to E'$ de X en x.
Intuitivement, on plongera donc localement l'espace analytique X au vois. de x dans $\mathbb{C}^n$, puis on projettera sur un sous-espace E' de $\mathbb{C}^n$ convenable.



1.4 Prop : (X,x) = espa. anal. pointé

$\varphi : X \to \mathbb{C}^n$ {germe de morph fini en x (morphisme dont le)

$\sim$

i) φ_x = position en x

ii) $\forall V_x$ voisinage de x ds X / $\varphi(V_x)$ est un voisinage de $\varphi(x)$ dans $\mathbb{C}^n$

(noter $\{\varphi\}(V_x)$ $\{\varphi\}$ = application sous-jacente)

preuve :

i ⇒ ii) φ_x^* position

1) $\varphi(x) = 0$ on se restreint à 1 vois de x / pour que φ morphisme fini et $\varphi^{-1}(0) = x$

(Th. morph. fini)

2) $\varphi_* \mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_S$-module cohérent et $Supp(\varphi_* \mathcal{O}_X) = \varphi(X)$

3) $(\varphi_* \mathcal{O}_X)_0 = \mathcal{O}_{X,x}$

$\varphi_x^* : \mathcal{O}_{n,0} \to \mathcal{O}_{X,x}$

$\mathcal{O}_{n,0} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$

$Ker\, \varphi_x^* = \{g \in \mathcal{O}_n \,/\, \varphi_x^*(g).1 = 0\}$

$Ann\, (\varphi_* \mathcal{O}_X)_0 = 0$

$= \{g \in \mathcal{O}_n \,/\, g.1 = 0\} = \{g \in \mathcal{O}_n \,/\, \varphi^*(g).1 = 0\}$

$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_n$-mod par φ^*

$F = X$-mod.

F de type fini $\{g_x \in \mathcal{O}_{X,x} \,/\, g_x F_x = 0\} = (Ann_X F)_x$

$F = \varphi_* \mathcal{O}_X$

$X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$

préfaisceau $(Ann\, F)(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U) \quad s\, F(U) = 0\}$ et si F de type fini $(Ann\, F)_x = Ann(F_x)$

↓

faisceau associé = $Ann\, F$

$Ann\, F$ est de type fini et m̂ cohérent si F l'est

$f_1, \dots, f_p$ gén. de $F(U)$

p40

$\mathcal{O}_U \xrightarrow{\eta} F|_U^p$

$s \longmapsto (sf_1, \dots, sf_p)$

$\Rightarrow (Ann\, F)|_U = Ker\, \eta$ est cohérent dès que F l'est.

général : $\mathrm{Ann}\, \varphi_x \mathcal{O}_X$ est cohérent
$\mathrm{Ann}\, \varphi_x \mathcal{O}_X$ nul en zéro
} $\Rightarrow$ $\mathrm{Ann}\, \varphi_x \mathcal{O}_X$ est nul localement (2)

$$K = \mathrm{Supp}\left(\frac{\mathcal{O}_X}{\mathrm{Ann}\, \varphi_x \mathcal{O}_X}\right) = \mathrm{Supp}(\varphi_x \mathcal{O}_X) \overset{2)}{=} \varphi(X)$$

(NB : F = X-mod ~~de type fini~~ cohérent $\Rightarrow$ $\mathrm{Supp}\, F = \mathrm{Supp}\, \mathcal{O}_X / \mathrm{Ann} F$

$x \in \mathrm{Supp}\, \mathcal{O}_X/\mathrm{Ann} F \Leftrightarrow 1_x \notin \mathrm{Ann}\, F_x$ ~~...~~ $\mathrm{Supp}\, F$
$\Leftrightarrow F_x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Supp}\, F$)

et (2)

K contient un voisinage de l'origine V_x

$\Downarrow$

$$V_x \subset \mathrm{Supp}\, \varphi_x \mathcal{O}_X$$

Plan

- $\varphi(X) = \mathrm{Supp}\, \varphi_* \mathcal{O}_X$
- $\mathcal{O}_X / \mathrm{Ann}\, \varphi_* \mathcal{O}_X$ a pour support $\varphi(X)$
- $\mathrm{Ann}\, \varphi_* \mathcal{O}_X$ cohérent
- $(\mathrm{Ann}\, \varphi_x \mathcal{O}_X)_0 = 0$ car φ_x plat $\Rightarrow$ nul loc.

2. Position et composantes intègres

A (X,x) esp. anal. pointé on sait associer $\nearrow X_{red,x}$; $\searrow X_{i,x}$ composantes intègres

(R) (Rappel : $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/(f_1,\dots,f_p)\Big|_X$ localement, $I=(f_1,\dots,f_p)$ (NB : en fait c'est des germes I_x) $\mathcal{O}_{X_{red}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/\sqrt{I}\Big|_{X_{red}}$

$\sqrt{I} = \bigcap_i P_i$ où P_i idéaux premiers minimaux

$\mathcal{O}_{X_i} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/P_i\Big|_{X_i}$ d'où : $\begin{matrix} \mathcal{O}_{X_{red}} & \to & \mathcal{O}_{X_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \leftarrow & X_i \end{matrix}$ (*))

2.1 Prop : $\varphi_x : X_x \to \mathbb{C}^n$ est une position en x $\iff$ $\begin{cases} \forall i \ \varphi_{i,x} \text{ est fini en } x \\ \exists i \ \varphi_{i,x} \text{ position en } x \end{cases}$

~~position en x~~

où l'on note $\varphi_{i,x} : X_{i,x} \to \mathbb{C}^n$

preuve : φ_x fini en $x \iff \forall i \ \varphi_{i,x}$ fini en x (cf caract. topologique de la finitude : x isolé dans $\varphi^{-1}(s)$) $s=\varphi(x)$

Il suffit alors de montrer que :

φ_x^* injectif $\iff \exists i \ \varphi_{i,x}^*$ injectif

$$\begin{matrix} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} & \xrightarrow{\varphi_x^*} & \mathcal{O}_X \\ {\scriptstyle \prod \varphi_{i,x}^*}\swarrow & \searrow^{h_x} & \downarrow \\ \prod_i \mathcal{O}_{X_i} & \longleftarrow & \mathcal{O}_{X_{red}} \end{matrix}$$

$\exists i \ \varphi_{i,x}^*$ injectif $\iff \prod_i \varphi_{i,x}^*$ injectif

$\mathcal{O}_{X_{red}} \to \prod_i \mathcal{O}_{X_{i,x}}$ est injectif car $\sqrt{I_x} = \bigcap P_{i,x}$ (cf (*) et déf de $\mathcal{O}_{X_{red}} \to \mathcal{O}_{X_i}$)

Il faut donc montrer que :

φ_x^* injectif $\iff h_x$ injectif

*$(\Rightarrow)$ h_x injectif $\Rightarrow \varphi_x^*$ injectif

$*(\Leftarrow)$ Si h_x non injectif, $\begin{cases} g \neq 0 \\ h_x(g) = 0 \end{cases}$ et $f_x^*(g) \in N = \sqrt{I_x}$ donc $f_x^*(g^k) = 0$ $(\exists k)$)

et l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ est intègre, donc $g^k \neq 0$, donc f_x^* non injectif.

CQFD

X espace analytique et X_x intègre

(penser à $\mathbb{C}^n$)

2.2 lemme : Soit X un esp. anal. dont les anneaux locaux sont intègres.
Soit F un X-module cohérent tel que F_x soit un $\mathcal{O}_{X,x}$-module sans torsion.
Alors : 1) $\exists$ vois. X' de x et un morphisme injectif de $F|_{X'}$ dans un $\mathcal{O}_{X'}$-module libre de type fini
2) $\forall y \in X'$ F_y est un $\mathcal{O}_{X',x}$-module sans torsion

preuve

2) $\Rightarrow$ 1) $\quad F|_{X'} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X'}^p$, $\quad f \mapsto (a_1, \dots, a_p)$

$y \in X'$ $\quad g \in \mathcal{O}_{X',y}$ $\quad f \in F_y$

$\forall g \in \mathcal{O}_{X',y}$, $g \neq 0$ $\quad gf = 0 \Rightarrow (ga_1, \dots, ga_p) = 0 \Rightarrow a_i = 0$ car $\mathcal{O}_{X,y}$ $\Rightarrow f = 0$.

1) K = corps des fractions de $\mathcal{O}_{X,x}$

$V = F_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K$ $\quad f \otimes \frac{a}{s}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \updownarrow$ (par problème universel)

$V = S^{-1} F_x \doteq S \times F_x / \sim$ $\quad \frac{af}{s}$

Comme $F_x = \mathcal{O}_{X,x}$-module sans torsion (ie $\forall s \in S = \mathcal{O}_{X,x} \setminus \{0\}$ $\forall f \in F_x$ $sf = 0 \Rightarrow f = 0$!)
on peut définir :

$$F_x \overset{\tilde{i}}{\hookrightarrow} V = F_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K = K\text{-espace-vectoriel de dim finie}$$

(car $F_x = \mathcal{O}_{X,x}$-mod. de dim finie et $F_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K = K$-module)
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ K = corps

$(f_1, \dots, f_p)$ syst. générateur de F_x

$(e_1, \dots, e_q) = K$-base de V

$\tilde{i}(f_i) \in V$ $\quad \tilde{i}(f_i) \underset{\text{abus}}{=} f_i = \sum_{j=1}^{q} \alpha_i^j e_j$

qui

quitte à diviser les e_j par un grand dénominateur commun on peut supposer que $\alpha_i^j \in \mathcal{O}_{X,x}$

L'application :

$$F_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

$$f_{1,x} \longmapsto (\alpha^1_{1,x}, \dots, \alpha^q_{1,x})$$

$$\vdots$$

$$f_{p,x} \longmapsto (\alpha^1_{p,x}, \dots, \alpha^q_{p,x})$$

définit une morphisme de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules de $F_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}$ car si $\sum \lambda_i f_{i,x} = 0$ est une relation entre les $f_{i,x}$, on a $\sum \lambda_i \tau(f_{i,x}) = 0$

(cf : $0 = \sum \lambda_i f_i \longrightarrow \sum \lambda_i (\alpha^1_{i,x}, \dots, \alpha^q_{i,x}) \in \mathcal{O}_{X,x}$ car $F_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow V$

τ ; $\wr$; $=$

$$0 = \sum_{i,j} \lambda_i \alpha_i^j e_j \in K^q$$

$$\begin{cases} \sum \lambda_i \alpha_i^1 = 0 \\ \vdots \\ \sum \lambda_i \alpha_i^q = 0 \end{cases}$$

)

De plus $F_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}^q_{X,x}$ est injective

Rappel : $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_x$-modules dès que $\mathcal{G}$ est $\mathcal{O}$-cohérent.
(où $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \doteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$) (R')

On a aussi : $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ cohérents $\Rightarrow$ $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ cohérent.

On a, ici : (grâce à (R')) $f_x \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x^p)$ injectif. C'est le germe d'une application f définie sur un petit voisinage U, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{O}^p|_U)$

$f : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{O}^p|_U$

$(\mathrm{Ker}\, f)_x = \mathrm{Ker}\, f_x = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker} f = 0$ localement, donc f est injective localement

Ker f cohérent

CQFD

2.3 Proposition : X espace analytique
$(X, x) \xrightarrow{f} (\mathbb{C}^n, 0)$ morphisme d'espaces pointés
X_x intègre
f position en x
Alors $\exists V_x$ voisinage de x $\forall y \in V_x$ f = position en y.

preuve : $f_* \mathcal{O}_X$ — $\exists X'$ voisinage de x dans X, $f|_{X'}$ est un morphisme fini } d'après le Th. des morphismes finis

$f_* \mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_S$-module cohérent et $S = \mathbb{C}^n$

$(f_* \mathcal{O}_X)_0 = \mathcal{O}_{X,x}$ est sans torsion sur $\mathcal{O}_{S,0}$. En effet :

$hg \doteq f_x^*(h) \cdot g$
$h \in \mathcal{O}_{S,0}$ $g \in \mathcal{O}_{X,x}$

$h \neq 0$ $f_x^*(h) \neq 0$ car f_x^* = position

(définition déjà donnée)

donc $f_x^*(h) g = 0 \Rightarrow g = 0$ car X_x est intègre ($\doteq \mathcal{O}_{X,x}$ intègre).

donc lemme 2.2, 2) :

$f_* \mathcal{O}_X$ est sans torsion localement sur $\mathcal{O}_S$

$y \in f^{-1}(s)$ $\quad \mathcal{O}_{X,y}$ (intègre) $\hookrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)_s = \bigoplus_{z \in f^{-1}(s)} \mathcal{O}_{X,z}$ sans torsion sur $\mathcal{O}_{S,s}$

$\Downarrow$

donc f_y^* injectif

~~(sinon $\exists h \in \mathcal{O}_{S,s}$, $h \neq 0$, $f_y^*(h) = 0$ ... autrement $f_y^*(h)(p_z) = 0$ où $p \neq 0$, et $p \in \bigoplus \mathcal{O}_{X,z} = (p_z)_{z \in f^{-1}(s)}$ ... intègre ... or $\mathcal{O}$ ... est sans torsion donc $f_y^*(h) \neq 0$)~~

(preuve :
Si $h \neq 0$ et $f_y^*(h) = 0$, $h(\mathcal{O}_{X,y} \oplus 0 \ldots \oplus 0) = (f_y^* h)\, \mathcal{O}_{X,y} \oplus \ldots \oplus 0 = 0$
d'où $h\, \mathcal{O}_{X,y} = 0 \Rightarrow \mathcal{O}_{X,y}$ a de la torsion, ce qui est absurde car $\mathcal{O}_{X,y}$ intègre

$h(\mathcal{O}_{X,y} \oplus \mathcal{O} \ldots + \mathcal{O}) = \mathcal{O}$

$\|$

$(f_y^* h)\, \mathcal{O}_{X,y} \oplus \ldots \mathcal{O}$

$\|$
$\mathcal{O}$

cqfd

2.4 Corollaire

$\left.\begin{array}{l} f_x \text{ position} \\ X_x \text{ intègre} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists X'$ vois. de x $\quad \{f\}|_{X'}$ ouverte

preuve : D'après 2.3, f_x est une position en y pour y appartenant à un voisinage X' de x. D'après la prop. 1.4 (caractérisation topologique d'une position), $f|_{X'}$ est ouverte.

CQFD

Position d'un germe intègre :

2.5 Théorème de l'élément primitif :

B anneau intègre
$A \subset B$ sous-anneau
B = A-module de type fini
K = corps de fraction de A de caractéristique 0 $\quad (A \subset K)$
i) $\exists \beta \in B \quad \exists \alpha \in A \setminus \{0\} \quad \alpha . B \subset A[\beta]$
ii) $\exists h \in A[T]$ monique irréductible dans $K[T]$, tel que $h(\beta) = 0$
iii) $A[T]/_h \simeq A[\beta]$

2.5.1 NB : B = A-mod de type fini
$b \in B \quad (e_1, \dots, e_p)$ = syst. générateur de B

$$b \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix} \Rightarrow \overbrace{\det(b\,Id - A)}^{\times Id} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det(b\,Id - A).B = 0$$

multiplier par la transposée de la comatrice

$$\Updownarrow$$

$$(b\,Id - A)\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$h(b) \doteq \det(b\,Id - A) = 0$

les points ii) et iii) sont donc faciles.
Seul le pt i) pose problème

2.5.2 exemple : $X \xrightarrow{\varphi} S$ (fini) $\quad \mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{S,\varphi(x)}$-module de type fini

$\forall f \in \mathcal{O}_{X,x} \quad f^n + \varphi^*(g_1).f^{n-1} + \dots + \varphi^*(g_n) = 0$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$

avec : $B = \mathcal{O}_{X,x}$
$\cup$
$A = \varphi^* \mathcal{O}_{S,\varphi(x)}$

2.6 Position d'un germe intègre : Théorème

(X,x) esp. anal. pointé

$\mathcal{O}_{X,x}$ intègre

$\varphi : (X,x) \to (\mathbb{C}^n,0)$ position en x

Hypothèses : $\exists U$ voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ $\exists V$ vois. de x dans X

$\forall \Delta$ sous-ensemble analytique de U, fermé, d'intérieur vide tel que :

1) $\varphi|_V : V \to U$ morphisme fini avec $\varphi^{-1}(0) = x$

2) $\varphi|_{\varphi^{-1}(U \setminus \Delta) \cap V} : \varphi^{-1}(U\setminus\Delta) \cap V \to U \setminus \Delta$ revêtement fini

3) $X' = \varphi^{-1}(U \setminus \Delta) \cap V$ dense dans V et connexe

X

x

V

U

$\mathbb{C}^n$

Rappel ~~Remarque~~ : $\varphi : X \to Y$

φ isomorphisme local en $x \iff \varphi_x^*$ isomorphisme

2.6.1 Lemme : $\exists U, V$ voisinages de 0 et x vérifiant le 1) du Théorème

$\exists h \in \mathcal{O}_n(U)[Z]$ monique

K = corps des fractions de $\mathcal{O}_{n,0}$

h_0 = image de h dans $K[Z]$, irréductible

$\exists g \in \mathcal{O}_n(U)$ dont l'image $g_0 \in \mathcal{O}_{n,0}$ est $\neq 0$

et tel que $Y = h^{-1}(0) \subset U \times \mathbb{C}$

$$\downarrow \pi$$

$$U$$

$\Gamma = g^{-1}(0)$

$\exists \mu$ morphisme tel que

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mu} & Y \subset U \times \mathbb{C} \\ & \varphi \searrow \quad \swarrow \pi & \\ & U & \end{array}$$

et tel que μ induise un isomorphisme en dehors de $U \setminus \Gamma$

(Ce lemme ramène la situation de 2.6 de V sur Y)

preuve : φ_x position, donc :

$$\varphi_x^* : A = \mathcal{O}_{n,0} \longrightarrow B = \mathcal{O}_{X,x} \text{ injectif}$$

$B = A$-module de type fini (car φ est fini). On peut voir A comme un sous-anneau de B, et B est intègre. Le théorème de l'élément primitif 2.5 donne :
$\exists\, \beta \in \mathcal{O}_{X,x}$ $\exists\, h_0 \in \mathcal{O}_{n,0}[Z]$ monique irréductible dans $K[Z]$ $\exists\, \alpha \in \mathcal{O}_{n,0}$ tels que :

$$\alpha . \mathcal{O}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{n,0}[h_0]$$
$$h_0(\beta) = 0$$
$$\mathcal{O}_{n,0}[Z]/_{h_0} \simeq \mathcal{O}_{n,0}[\beta]$$

Ainsi $\exists\, h \in \mathcal{O}_n(U)[Z]$ représentant h_0
$\exists\, g \in \mathcal{O}_n(U)$ représentant α
$\exists\, b \in \mathcal{O}_X(V)$ représentant β (il servira à définir μ)

Soit $Y = h^{-1}(0)$ = sous-espace analytique de $U \times \mathbb{C}$

$$X \supset V \xrightarrow{(\varphi, b)} Y \subset U \times \mathbb{C}$$

car $b \in \mathcal{O}_X(V)$ définit (bijectivement) un morphisme de Y dans $\mathbb{C}$.

on arrive dans Y car $\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}}/_{h}$ est l'algèbre de Y
((φ,b) passe au quotient car $(\varphi, b)^*. h = 0$, cf lemme p)

On pose $\mu = (\varphi, b)$:

$$\begin{array}{ccc} x \ni X \supset V & \xrightarrow{\mu = (\varphi, b)} & Y \subset U \times \mathbb{C} \ni (0, b(x)) \\ & \searrow^{\varphi} \quad \swarrow_{\pi} & \\ & 0 \ni U & \end{array}$$

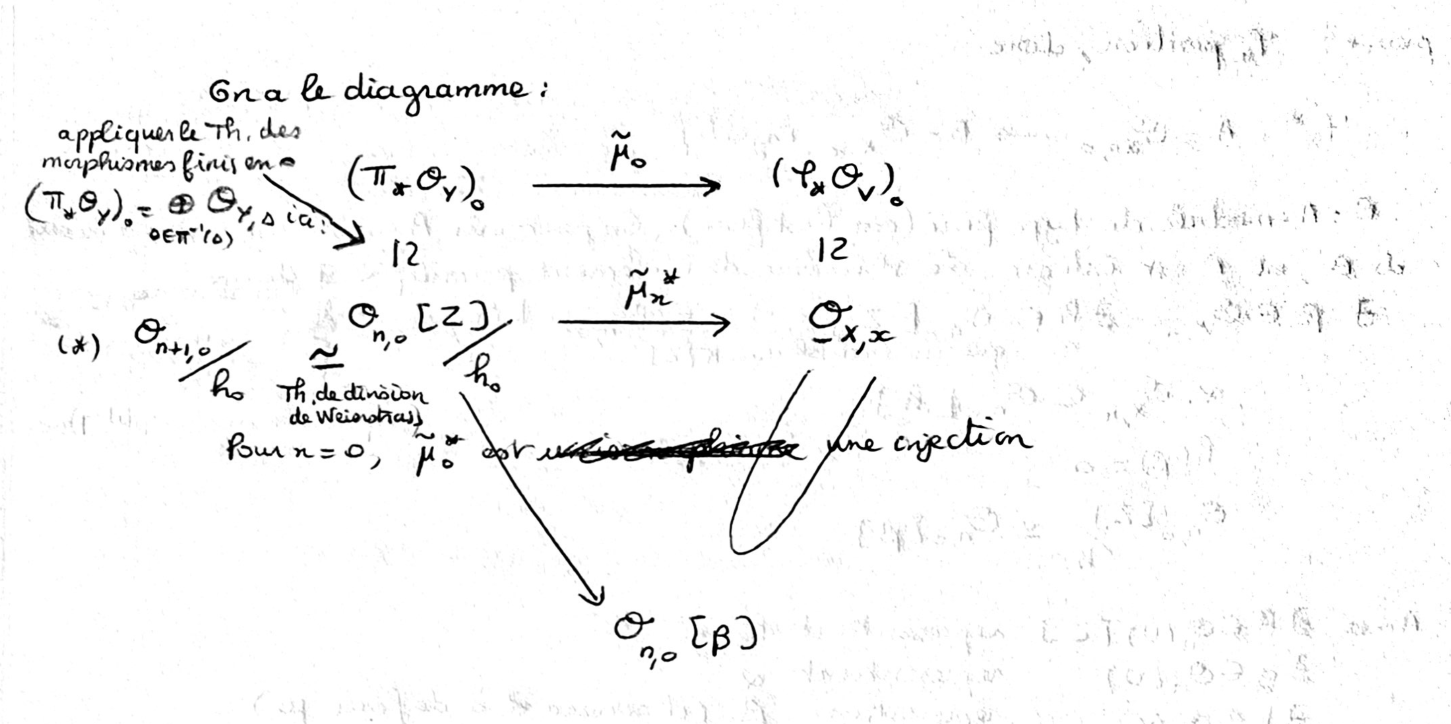
$(0, b(x))$: $b(x) = 0$ ← pas évident

Affirmation :
μ est un isomorphisme au dessus de $U \setminus T$?.

π est un morphisme fini (car $\pi^{-1}(0)$ fait de pts isolés, π étant analytique), donc π est fini localement. Il suffit de montrer que :

$\tilde{\mu} : \pi_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_V$ est un isomorphisme au dessus de $U \setminus T$ (admis. Frisch s'est planté et K. Saito a dit que c'était dur !)

On a le diagramme :



$\tilde{\mu}_x$ = morphisme entre 2 anneaux cohérents, donc définir une injection localement.

<u>Surjectivité</u> : $U \setminus \Gamma$

$$g \cdot (\varphi_* \mathcal{O}_V)_0 \subset \tilde{\mu}_0 (\pi_* \mathcal{O}_Y)_0$$

$$\varphi_x^*(\alpha) \cdot \mathcal{O}_{X,x} \subset \mu_x^* \mathcal{O}_{Y,0}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,x} & \xleftarrow{\mu_x^*} & \mathcal{O}_{Y,0} \\ \cup & & \wr\wr \\ \mathcal{O}_{n,0}[\beta] & \simeq & \mathcal{O}_{n,0}[Z]/h_0 \end{array}$$

CQFD

(*) $\mathcal{O}_{n+1,0} = \mathcal{O}_{n,0}\{z\}$ et h_0 monique en z donc régulier en z (ie $h_0(0,z) \not\equiv 0$)

$$\forall f \in \mathcal{O}_{n,0}\{z\} \quad f = u\, h_0 + \underbrace{a_1(z')z^{d-1} + \dots + a_{d-1}(z')}_{\in \mathcal{O}_{n,0}[z]} \qquad a_i(0) = 0$$

Le Théorème de Weierst. de division donne l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_{n+1,0}/h_0 \simeq \mathcal{O}_{n,0}[z]/h_0$$

preuve du Th 2.6.

U connexe

δ = discriminant du polynôme h $\delta \in \mathcal{O}_n(U)$

$\Delta' = \delta^{-1}(0)$ est un sous-espace analytique fermé de U d'intérieur vide (sinon$^{(*)}$ $\delta \equiv 0$, $\mathrm{Res}(h_0, h_0') = 0 \Rightarrow h_0$ et h_0' ne seraient pas premiers entre eux dans $K[Z]$ comme l'indique l'hypothèse h_0 est irréductible)

$\Delta = \Gamma \cup \Delta' = (g\delta)^{-1}(0)$ est fermé d'intérieur vide (cf$^{(*)}$ Hartogs Prop.)

$V \longrightarrow Y_0$ irréductible

position φ (de V vers U) ; π position ($Y_0 \to U$) donc φ et π ouverts (cf 2.4 p 92)

et $\begin{cases} Y' = \pi^{-1}(Y \setminus \Delta) \\ p = \deg h \end{cases}$

mémoire DEA [résultat classique : en dehors du discriminant Δ, $\pi : Y' \to Y \setminus \Delta \cap U$ est un revêtement à p feuillets. Ainsi

$\varphi : X' = V \cap \varphi^{-1}(U \setminus \Delta) \to U_{\setminus\Delta}$ est un revêtement à p feuillets de $U \setminus \Delta$

(Hartogs) $U \setminus \Delta$ dense dans U, $V \to U$ ouverte $\}$ $\Rightarrow X'$ dense

Y' connexe (non montré) $\Rightarrow X'$ connexe

CQFD

3. Dimension d'un espace analytique

(X,x) $\quad \dim_x X = \operatorname{Inf}_{m \in \mathbb{N}} \{ \exists m \,/\, \exists \varphi : (X,x) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ morphisme fini $\} \in \mathbb{N}$

L'application $x \mapsto \dim_x X$ est semi-continue supérieurement, ie :

$\exists V_x \ \forall y \in V_x \quad \dim_y X_y \leq \dim_x X \quad (1)$

L'ensemble $\{y \in X \,/\, \varphi_y$ est fini$\}$ est ouvert d'où (1)

NB : X de dimension pure $\Rightarrow \dim_x X$ = constante

3.1 Proposition : $\begin{cases} X \text{ espace analytique}, \ x \in X \\ d = \dim_x X \\ X_x \text{ intègre} \end{cases}$

$\exists V$ voisinage de x $\exists V' \subset V$, V' ouvert dense, $\forall y \in V'$ (X, y) est lisse de ~~et a la même dimension que X_y comme variété complexe~~ d.
dimension d (comme variété analytique)

3.2 Corollaire : Si X = variété analytique, $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ est intègre
et $\dim_x X = d$ $\forall x \in X$ où d = dimension de la variété X.
Ainsi, dans ce cas, $\dim_x X$ n'a qu'un sens (que X soit considéré comme variété ana. ou comme espace ana).

preuve : (X, x)
$\downarrow \varphi$ morphisme fini en x
$\mathbb{C}^d$

Par hypothèse, φ est une position en x (car φ n'est pas "raffinable" sur $\mathbb{C}^m$ et $m < d$, prop 1.3). Le théorème de description locale 2.6 d'un germe intègre donne $V' = \varphi^{-1}(U \setminus \Delta) \cap V$
(NB : dans 2.6, le revêtement 2) ~~dans~~ montre que V' est une variété anal. de dimension la dim. de la base $U \setminus \Delta \subset \mathbb{C}^d$, donc d.)

CQFD

3.3 Proposition : $(X, x) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{C}^m, 0)$
Alors :

$$\varphi \text{ position} \iff \begin{cases} \varphi \text{ finie en } x \\ \dim_x X = m \end{cases}$$

preuve :
($\Leftarrow$) trivial, car φ n'est pas raffinable sur $\mathbb{C}^{i}$ (cf 3.2 preuve, m̂ raisonnement)
($\Rightarrow$) On a $m \geq \dim_x X$
De plus :

$$\begin{array}{ccc} X'_x & \longrightarrow & X_x \\ & \searrow^{\varphi'} & \downarrow \varphi \\ & & \mathbb{C}^m \end{array}$$

X'_x composante intègre de X_x
φ induit une position φ' (cf. 2.1)

d'où, en appliquant le Th. de description locale 2.6 à φ' :
$\exists V'$ dense dans X' $\forall y \in V'$ $\dim_y V' = m$ V' lisse en y

donc $\dim_x X' = m$ comme espace analytique (d'après la Prop 3.1)

On a vu en 2.1 que $\Psi : X \to \mathbb{C}^k$ fini $\Rightarrow \Psi' : X' \to \mathbb{C}^k$ fini, donc

$$\dim_x X' \leq \dim_x X$$

pour toute composante intègre X' de X.
Finalement, on a montré ~~que~~ l'existence de X' composante intègre de X telle que :

$$m = \dim_x X' \leq \dim_x X \leq m \Rightarrow \dim_x X = m$$

CQFD

NB : 3.3 implique que toutes les positions Ψ de X en x ont même but $\mathbb{C}^m$.

3.4 Corollaire : $\dim_x X = \sup_{\substack{X' \text{comp. intègres} \\ \text{de } X_x}} \dim_x X'$

Toutes les composantes intègres de X ont une dimension $\leq$ à la dimension de X et il existe une ~~et une seule~~ composante intègre X' telle que $\dim_x X' = \dim_x X$ (cf preuve de 3.3).

CQFD

(Le théorème des zéros)

3.5 Lemme : X espace analytique, $x \in X$
$h \in \mathcal{O}_X(X)$ $\{h\}$ définie par $\{h\}^{(x)} = $ " $h/\mathfrak{m}_x$ " (cf)
~~*~~ Hyp : X_x intègre.
Alors : $\{h\}_x$ = germe de $\{h\}$ en x. $\{h\} : X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \bar{h}_x$ classe dans $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}$

$\{h\}_x = 0 \Rightarrow h_x = 0$

preuve :
exemple $X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}/(y^2 - x^3) \Big|_{y^2 - x^3 = 0}$ $\mathcal{O}_{(0,0)}$ intègre

$f(x,y)\big|_{(y^2-x^3=0)} = 0 \Rightarrow f \in (y^2 - x^3)$ c'est le th. des zéros car $\sqrt{(y^2-x^3)} = (y^2 - x^3)$

1) C'est évident si $x \in X_{reg}$ car $X = \mathbb{C}^n$ au voisinage : $X|_V \simeq \mathbb{C}^n|_\Omega$
$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I = 0$ donc $\exists \Omega' \Subset \Omega$ $0 \in \Omega' \subset \Omega$ $h(x_1, \dots, x_n) = 0$ sur Ω' donc $\{h\}(x) = 0$.

2) Si $h_x \neq 0$, $X \xrightarrow{h} \mathcal{O}_X$ " = multiplication par h " est une section globale, injective en $x^{(*)}$, donc $\mathcal{O}_{X,x} \neq 0$, donc au voisinage (cf cohérence de $\mathcal{O}_X$).
h_y est donc injective pour $y \in V'$ où y régulier et V' ouvert dense$^{(*)}$, donc (cf 1)) $\{h\}_y \neq 0$.

(*) cf description locale 2.6) ((**) car X_x intègre)

Alors : $\left.\begin{array}{l} x \in \overline{V}' \\ \begin{cases} \{h\}(y) \neq 0 \\ \forall y \in V' \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \{h\}(x) \neq 0$

3.6 Théorème des zéros.

X espace analytique

$x \in X \qquad f \in \mathcal{O}_X(X)$

i) $\{f\}_x = 0$ (ie l'application sous-jacente à f est nulle au voisinage de X)

$\Updownarrow$

ii) f_x nilpotent dans $\mathcal{O}_{X,x}$

ii) $\Rightarrow$ i) clair $\quad \mathcal{O}_{X,x} = \left.{}^{\mathcal{O}_n}/_{I_x}\right|_X \quad f_x \in \sqrt{I_x} \Rightarrow f_x^k \in I_x$

$\begin{cases} \{f\}_x = g(x) \\ \text{où } f = \dot{g} \end{cases}$

or $f^k = \dot{g}^k \in I_x$ comme $x \in X$ $\quad g^k(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \rightarrow \{g\}_x = 0$

<u>ex</u> : $\mathcal{O}_X = \left.{}^{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}/_I\right|_X \qquad X$ = les zéros de I

($x \in X \Leftrightarrow \forall f \in I \quad f(x) = 0$)

Soit $\dot{g}_x \in \left({}^{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}/_I\right)_x$ nilpotent $g_x^k \in I_x \Leftrightarrow g^k(x) = 0$

donc $g(x) = 0$

donc $\{g\}_x = 0$

car $\{\dot{g}\} : X \to \mathbb{C}$

$x \mapsto g(x)$

$y^2 - x^3 = 0$

$\{g\}$

X

(NB : $\dot{g}_x = f_x$ donc g analytique sur un voisinage de x)

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,x}/_{I_x} = \left({}^{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}}/_I\right)_x$

i) ⇒ ii) P_i = idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$ $\left(= \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I\right)$

$\sqrt{\mathcal{O}_{X,x}} = \bigcap P_{i,x}$

$X_{i,x}$ = composantes intègres = définis par $P_{i,x}$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$

Rappel : $X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I$ $\quad I \subset \sqrt{I}$ $\quad \sqrt{I}/I \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I = X$

P_i id minimaux premiers de I $\quad \sqrt{I} =$

$\sqrt{I} = \bigcap P_i$

$X_i = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/P_i \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/\sqrt{I} = X_{red}$

$\{f\}_x = 0 \quad \forall y \in V_x \cap X \quad \{f\}(y) = 0$ où $\{f\} : X \to \mathbb{C}$

$\begin{cases} \{f_i\} : X_i = \text{zéros de } P_i \longrightarrow \mathbb{C} \quad (f_i \text{ induit par } f) \\ \{f_i\}_x = 0 \end{cases}$

⇓ lemme 3.5

$f_{i,x} = 0 \Rightarrow f \in P_i$, $\forall i$ donc $f \in \bigcap P_i = \sqrt{\mathcal{O}_{X,x}}$.

ie f_x nilpotent dans $\mathcal{O}_{X,x}$

CQFD

Parenthèse :

① $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{H} \to 0$ suite exacte de faisceaux ⟺ suite exacte fibre à fibre. Alors :

~~1) $\forall f \in \mathcal{H}_x$ ... $\exists \Omega$ $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\tilde{f}_x = f_x$~~
~~$g \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\Psi(g) = \tilde{f}$~~

~~Bonne~~ $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$ $x \in \Omega$ $\exists \Omega'$ $x \in \Omega' \subset \Omega$ $\exists g \in \mathcal{G}(\Omega')$ / on ait $\Psi(\Omega')(g) = f|_{\Omega'}$

② exercice : $\begin{cases} \text{Si } \mathcal{F} \text{ est flasque, et } 0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{H} \to 0 \text{ exacte,} \\ \forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \ \exists g \in \mathcal{G}(\Omega) \ \Psi(g) = f \end{cases}$ (ie $0 \to \mathcal{F}(\Omega) \to \mathcal{G}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega) \to 0$)
(ie $R^1\Gamma(\Omega, \mathcal{F}) = 0$ $\forall \mathcal{F}$ flasque et Ω ouvert)

preuve de ② : $x \in \Omega$ $A = \{(x, U)$ U voisinage de x / $\exists g_U \in \mathcal{G}(U)$ $\Psi(g) = f\} \neq \emptyset$ est un ensemble ordonné inductif. Soit (x, Ω') un élément maximal, montrons que $\Omega' = \Omega$: Soit $y \in \Omega \setminus \Omega'$: (y, V) V voisinage de y $h \in \Gamma(V, \mathcal{G})$ et $\Psi(h) = g$

sur $\Omega' \cap V$: $\Psi(h)|_{\Omega' \cap V} = \Psi(g_{\Omega'})|_{\Omega' \cap V} \Rightarrow h - g_{\Omega'}|_{\Omega' \cap V} \in \ker \Psi = \operatorname{Im} \varphi$

donc (foncteur section exact à gauche) : $h - g_{\Omega'} = \varphi(\lambda)$ où $\lambda \in \Gamma(\Omega' \cap V, \mathcal{F})$

$\mathcal{F}$ flasque ⇒ on prolonge λ à Ω. Soit $\tilde{\lambda}$ le prolongé

Soit la section qui vaut $\begin{cases} g_{\Omega'} \text{ sur } \Omega' \\ h = \Psi(\tilde{\lambda})|_V \end{cases}$. Elles coïncident sur $\Omega' \cap V$ donc

définissent une section s sur $\Omega' \cup V$ et $\Psi(s) = f$, ce qui est absurde.

Donc $\Omega' = \Omega$.

CQFD

③ Corollaire de ②: Si $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I$, f section de $\mathcal{O}_X$ sur X s'écrira, pour $x \in X$,

$f_x = \dot{g}_x$ où g = section de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ sur un voisinage de x (ie g holomorphe sur un voisinage de x)

On applique ① avec la suite exacte $0 \to I \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I \to 0$